DÉNOMBREMENT - COMBINATOIRE - LOIS DE PROBABILITÉS DISCRÈTES

Dans tout ce qui suit, nous noterons $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$, ce produit s'appelle "factorielle n".

On convient que $0! = 1$.

Exercices sur les factorielles :

- Démontrer que $6! \times 7! = 10!$ (sans calculer 10!)
- Simplifier $\dfrac{(n+1)!}{n!}$
- Démontrer que tout entier k : $\quad (k + 1)! - k! = k \times k!$

  Puis que pour tout entier n non nul : $\quad n! = 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kk!$

1. Principes de base du dénombrement

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini E, noté Card(E), représente son nombre d'éléments.

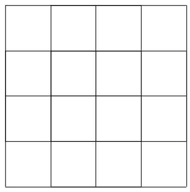
Par exemple avec $E = [\![0\,;\,10]\!]$, on a : $\quad \mathrm{Card}(E) = 11$

1.1. Principe de la somme

Si des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_p$ constituent une partition d'un ensemble fini E, alors :

$$\mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \ldots + \mathrm{Card}(A_p) = \mathrm{Card}(E)$$

Exemple :



Combien y a-t-il de carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre ?

Soit E l'ensemble de tous les carrés. Notons A_1, A_2, A_3 et A_4 l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés respectifs 1, 2, 3 et 4 carreaux. Les sous-ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 constituent une partition de E (puisqu'ils n'ont aucun élément en commun et que leur réunion est E).

D'après le principe de la somme :

$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \mathrm{Card}(A_3) + \mathrm{Card}(A_4) = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$$

Il y a donc, au total 30 carrés dont les côtés sont matérialisés sur la figure ci-contre.

Conséquences

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. On a les relations suivantes :

1) Lien entre le cardinal de l'union et le cardinal de l'intersection :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

2) Dans le cas où A et B sont disjoints (c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$) alors :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

3) Lien entre le cardinal d'une partie et celui de son complémentaire :

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

Démonstrations :

Démontrons tout d'abord les points 2) et 3).

2) A et B étant disjoints, ils constituent une partition de l'ensemble $A \cup B$. D'après le principe de la somme :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

3) Les ensembles A et $\overline{A}$ constituent une partition de l'ensemble E, donc là encore, on a :

$$\text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E).$$

1) Notons $B \setminus A$ l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A et $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Remarquons que : $$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$$

(c'est-à-dire $B \setminus A$ est le complémentaire de $A \cap B$ dans B)

Donc d'après 3) : $$\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

De même : $$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$$

Enfin, remarquons que $B \setminus A$, $A \setminus B$ et $A \cap B$ constituent une partition de $A \cup B$ donc :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap B)$$

D'où 1).

Exercice :

Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Notons E l'ensemble des vacanciers de ce camp, T l'ensemble des personnes pratiquant le tennis et N l'ensemble des personnes pratiquant la natation. D'après les données :

$$\text{Card}(E) = 80,\ \text{Card}(N) = 33,\ \text{Card}(T) = 55 \text{ et } \text{Card}(E \setminus (T \cup N)) = 16$$

Nous recherchons $\text{Card}(T \cap N)$.

Or : $\text{Card}(E \setminus (T \cup N)) = \text{Card}(E) - \text{Card}(T \cup N) = \text{Card}(E) - \text{Card}(T) - \text{Card}(N) + \text{Card}(T \cap N) = 16$

D'où : $\text{Card}(T \cap N) = 16 - \text{Card}(E) + \text{Card}(T) + \text{Card}(N) = 16 - 80 + 33 + 55 = 24$

En conclusion, 24 personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation.

1.2. Principe du produit (ou principe multiplicatif)

Si une situation comporte p étapes offrant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$ possibilités alors le nombre total d'issues est : $$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$$

C'est la règle utilisée lorsque nous dressons un arbre (simple).

Exemples :

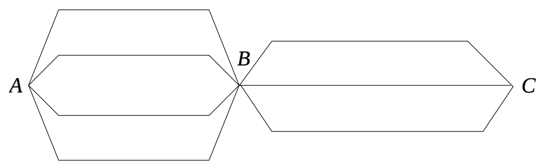
- Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

  Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc $26 \times 25 \times 9 = 5850$ codes distincts.

- Nombre d'itinéraires distincts menant de A à C ? Nombre d'itinéraires "aller retour" A-C-A n'empruntant que des chemins distincts ?

  Aller simple A-C : $4 \times 3 = 12$

  Aller retour A-C-A : $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$



Du principe multiplicatif, découle le cardinal du produit cartésien :

Rappel : le produit cartésien de p ensembles E_1, E_2, ..., E_p, noté $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$, représente l'ensemble des p-uplets $(e_1, e_2, ... , e_p)$ où $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, ... , $e_p \in E_p$.

Si E_1, E_2, ..., E_p sont p ensembles de cardinal fini, alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times ... \times \text{Card}(E_p)$$

Tous les principes exposés ci-dessus étant intuitivement évident, nous ne préciserons pas nécessairement, par la suite, quand nous les utiliserons.

2. Dénombrement des *p*-listes

2.1. Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}$.

Une p-liste (ou liste de longueur p) de E est un p-uplet d'éléments de E.

C'est donc un élément du produit cartésien $E^P = E \times ... \times E$ (p facteurs)

Exemples :

- $E = \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; 99\}$. Une 5-liste de E est par exemple (21, 12, 12, 15, 98).
- $E = \{a ; b ; c ; ... ; z\}$. Le 6-uplet (a, n, a, n, a, s) est une 6-liste de E. En pratique, et lorsque la situation le permet, une p-liste est tout simplement notée ainsi : $a\,n\,a\,n\,a\,s$.

Remarques :

- On précise parfois p-liste "avec répétition" pour les distinguer des arrangements qui seront évoqués au paragraphe suivant.
- On suppose que la 0-liste existe, c'est la liste qui ne comporte aucun élément.

2.2. Théorème

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Le cardinal de l'ensemble E^p des p-listes de E est n^p.

La démonstration de ce théorème découle simplement du principe multiplicatif.

Applications :

1) Au loto sportif, on coche l'une des trois cases $\boxed{1}$ $\boxed{N}$ $\boxed{2}$ pour chacun des 13 matches sélectionnés.

   Dénombrer le nombre de grilles distinctes.

   Il y en a autant que de 13-listes de l'ensemble $\{1 ; N ; 2\}$ soit $3^{13} = 1594323$.

2) Combien y a-t-il de numéro de téléphone commençant par 0384... ?

   Les 6 numéros qui suivent sont des 6-listes de l'ensemble $\{0 ; 1 ; ... ; 9\}$. Il y en a $10^6 = 1000000$.

3) Nombre de codes possibles pour une carte bleue ?

   Il y en a autant que des 4-listes de $\{0 ; 1 ; ... ; 9\}$, c'est-à-dire $10^4 = 10000$.

4) n^p est le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. (Pour chacun des p éléments de l'ensemble de départ, il y a n choix d'image dans l'ensemble d'arrivée)

3. Dénombrement des Arrangements et des Permutations

3.1. Définition

Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

Un p-arrangement (ou arrangement de p éléments) de E est une p-liste d'éléments **distincts** de E.

Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E.

Un arrangement est donc une p-liste dans laquelle il n'y a pas de répétitions.

Exemples :

- $E = \{a ; b ; c ; ... ; z\}$. Les listes suivantes : *b e a u*, *m a t i n*, *h i v e r* sont des arrangements de 4 et 5 éléments de E. Par contre, *a r r a n g e m e n t* n'est pas un arrangement de 11 éléments de E car ses éléments ne sont pas distincts.
- Soit $E = \{s ; u ; c ; r ; e\}$. Les anagrammes du mot *s u c r e* sont des permutations de E.

Remarque : une permutation de E correspond à une bijection de E.

3.2. Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

- Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$A_n^p = n(n-1)\,...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Touche calculatrice : $\boxed{nPr}$

- Le nombre de permutations de E est : $A_n^n = n!$

Et par convention, le nombre d'arrangement de 0 éléments d'un ensemble E est $A_n^0 = 1$.

La démonstration de ce théorème découle simplement du principe multiplicatif.

Remarque : il y a donc $n!$ bijections d'un ensemble E de cardinal n dans lui même.

Exercice : démontrer que : $A_n^{n-1} = n!$

Applications :

1) Le tiercé : une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?

   Soit E l'ensemble des numéros des chevaux. On a Card(E) = 20. Un tiercé correspond à un arrangement de 3 éléments de E, il y en a $A_{20}^3 = 6840$.

2) De combien de façons peut-on repartir 7 personnes sur 7 chaises ?

   Désignons par p_1, p_2, ..., p_7 les 7 personnes et posons $E = \{p_1 ; p_2 ; ... ; p_7\}$. Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de E c'est-à-dire une permutation de E, il y en a $7! = 5040$.

3) Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ? (Au plus un manteau par patère)

   Notons P_1, ... , P_5 les 5 patères. Chaque rangement peut se voir comme un 3-arrangement de l'ensemble $\{P_1, ... , P_5\}$. Par exemple, $P_2P_1P_4$ signifie "manteau n°1 sur P_2, manteau n°2 sur P_1 et manteau n°3 sur P_4".

   Il y a donc $A_5^3 = 60$ rangements possibles.

4) Nombre de mots (ayant un sens ou non) de 5 lettres distinctes de notre alphabet : A_{26}^{5}

5) Tirages ordonnés : Une urne contient 10 boules numérotées 0, 1, ... , 10. On en tire successivement trois sans remise. Combien de tirages différents ? A_{10}^{3}.

6) A_n^p est le nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. (n choix d'image pour le premier élément, $n-1$ choix pour le second, etc..., $n-p+1$ choix pour le dernier).

$A_n^n = n\,!$ est le nombre le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal n sur lui même.

4. Dénombrement des Combinaisons

4.1. Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

Une *p*-combinaison (ou combinaison de p éléments) de E est une partie de E ayant p éléments.

Exemple :

$E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ et $p = 2$. Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties : $\{a\ ;\ b\}$, $\{a\ ;\ c\}$ et $\{b\ ;\ c\}$.

Il est essentiel de noter que :

- Dans une partie, les éléments sont deux à deux distincts.
- Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales .
  Ainsi $\{a\ ;\ b\} = \{b\ ;\ a\}$. (L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance)

4.2. Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(Ce nombre est aussi noté C_n^p)

Touche calculatrice : $\boxed{nCr}$

Les coefficients $\binom{n}{p}$ sont encore appelés coefficient binomiaux. (On verra pourquoi au paragraphe suivant)

Si p est strictement supérieur à n, on convient que dans ce cas $\binom{n}{p} = 0$.

Remarque : bien que les coefficients $\binom{n}{p}$ soient définis sous la forme d'une fraction, ils sont bien des entiers.

Ceci sera démontré un peu plus loin dans cette leçon (en utilisant la relation de Pascal).

Exercice : soit n un entier supérieur à 2. Montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n!}{p!}$ est un entier pair.

En effet, pour tout $p \in [\![0, n-2]\!]$, $p!$ divise $(n-2)!$ donc, il existe un entier k tel que :

$$(n-2)! = k\,p!$$

D'où :
$$n\,! = n\,(n-1)\,(n-2)! = n\,(n-1)\,k\,p!$$

Les entiers $n-1$ et n étant consécutifs, l'un des deux est donc pair. Donc $\dfrac{n!}{p!}$ est pair.

Enfin, comme la somme d'entiers pairs est un entier pair, on en déduit le résultat souhaité.

Démonstration du théorème 4.2. :

Dénombrons les arrangements de p éléments d'un ensemble fini E de cardinal n.

Un arrangement est caractérisé par :

- Le choix d'une partie de E à p éléments (Notons qu'il y a $\binom{n}{p}$ choix de telles parties)
- La façon d'ordonner les p éléments de la partie choisie ($p!$ façons)

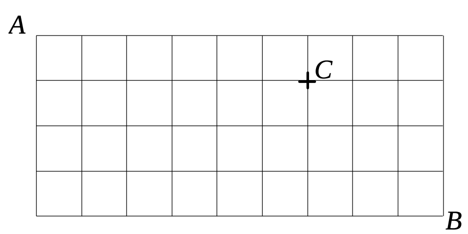
Le principe multiplicatif donne alors $A_n^p = \binom{n}{p} p!$ d'où le théorème.

4.3. Interprétation importante

$\binom{n}{p}$ représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (l'ordre n'important pas).

Applications

1) Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles (on ne tient pas compte du numéro complémentaire) ? C'est le nombre de façons de choisir 6 objets parmi 49, soit $\binom{49}{6} = 13983816$.
2) Le Poker : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une "main").
   a) Nombre de mains total : $\binom{32}{5} = 201376$
   b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as : le nombre de façons de choisir 3 as parmi 4 est $\binom{4}{3}$, le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi 28 "non as" est : $\binom{28}{2}$. On applique le principe multiplicatif, ce qui donne : $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 1512$.
   c) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as : $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 1540$.
3) Nombre de dominos (7 numéros) : $\binom{7}{2} + 7$ (doubles) $= 21 + 7 = 28$.
4) Nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes : $\binom{20}{3} = 1140$.
5) Tirages simultanés ou non ordonnés : une urne contient 10 boules numérotées 0, 1, ... , 10. On en tire simultanément trois. Combien de tirages différents ? $\binom{10}{3} = 120$.
6) Le quadrillage ci-contre (9×4), combien y a-t-il de chemins allant de A à B (on se déplace uniquement vers la **D**roite ou vers le **B**as) ?

   Indication : on pourra dénombrer le nombre de mots de 13 lettres qui contiennent 9 fois la lettre **D** et 4 fois la lettre **B**.

   Réponse : $\binom{13}{9} = 715$.

   Combien de ces chemins passent par le point C ?

   Réponse : $\binom{7}{1} \times \binom{6}{3} = 140$.

7) Nombre de diagonales d'un polygone à n côtés ?

- Nombre de façons de relier 2 sommets : $\binom{n}{2}$

- Nombre de côtés : n

D'où le nombre de diagonales : $\binom{n}{2} - n = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} - n = \dfrac{n(n-1)-2n}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Quel polygone a autant de diagonales que de côtés ?

On résout l'équation $\dfrac{n(n-3)}{2} = n$ et on trouve $n = 0$ (impossible) ou $n = 5$.

Le pentagone a autant de diagonales que de côtés et c'est le seul polygone jouissant de cette propriété.

Quel polygone a 1325 diagonales ?

On résout l'équation $\dfrac{n(n-3)}{2} = 1325$. On trouve $n = 53$ ou $n = -50$ (impossible).

C'est donc le 53-gone qui possède 1325 diagonales.

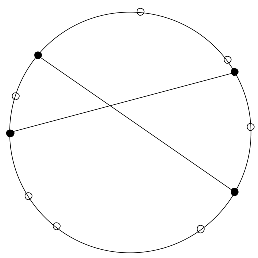
8) On se donne n points distincts sur un cercle.

Combien de cordes définissent-ils ?

Une corde est obtenue en choisissant 2 points parmi n, il y en a donc $\binom{n}{2}$.

On suppose que ces cordes se coupent en des points distincts à l'intérieur du cercle.

Combien y a-t-il de points d'intersection ?



Choisir un point d'intersection, c'est choisir deux cordes.

Choisir deux cordes, c'est choisir 4 points parmi les n.

Il y a donc $\binom{n}{4}$ points d'intersection.

9) $\binom{n}{p}$ représente le nombre d'applications strictement croissantes d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. En effet, soient X (resp. Y) un ensemble de cardinal p (resp. n) et f une application strictement croissante de X dans Y. Alors f est nécessairement injective (si deux éléments avaient même image, f ne pourrait être strictement croissante). Pour construire f, il faut donc se donner déjà une telle injection (A_n^p choix). Parmi toutes ces injections, un certain nombre ont la même image $f(X)$: il y en p ! (c'est le nombre de façons de permuter les p éléments de $f(X)$. Or parmi ces p ! injections de même image $f(X)$, une seule est strictement croissante. Le nombre d'applications strictement croissantes de X dans Y est donc $\dfrac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p}$.

4.4. Propriétés des coefficients binomiaux

4.4.1. Propriété *Symétrie*

Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Démonstration : $\binom{n}{p}$ représente le nombre parties de p éléments d'un ensemble E. Or, à chaque partie on peut associer de façon unique une autre partie : son complémentaire.

Et le complémentaire d'une partie à p élément comporte $n - p$ éléments. Donc dénombrer les parties à p éléments revient à dénombrer les parties complémentaires à $n - p$ éléments et il y en a $\binom{n}{n-p}$.

4.4.2. Conséquences : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Exemple : le nombre de façons de choisir 2 délégués parmi 30 élèves est égal au nombre de façons de choisir 28 élèves non délégués parmi 30 : $\binom{30}{2} = \binom{30}{28}$.

4.4.3. Propriété *Relation de Pascal*

Pour tout entier n et tout entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant n - 1$, on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Démonstration ensembliste : Soit E un ensemble de cardinal fini n avec $n \geqslant 2$. Soit a un élément fixé de E. Remarquons que les parties à p éléments de E se partagent en deux catégories :

- celles ne contenant pas a (il y en a $\binom{n-1}{p}$: choix de p éléments parmi $n - 1$)
- celles contenant a (au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$: choix de $p - 1$ éléments parmi $n - 1$)

Étant en présence d'une partition, le principe de la somme nous livre alors le résultat.

Démonstration algébrique :

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!\,p}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Application : démontrer, par récurrence, que les coefficients $\binom{n}{p}$ sont des entiers (pour tout entier naturel n et tout entier naturel p compris entre 0 et n)

On considère la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) : \text{pour tout } p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n}{p} \text{ est entier}$$

- On a $\dbinom{0}{0} = 1 \in \mathbb{N}$ d'où $\wp(0)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: pour tout $q \in [\![0, n]\!]$, $\dbinom{n}{q}$ est entier

  Déjà, $\dbinom{n+1}{0}$ et $\dbinom{n+1}{n+1}$ sont des entiers (puisque égaux à 1).

  Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. D'après la relation de Pascal, on a :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

  Or, $\dbinom{n}{p}$ et $\dbinom{n}{p+1}$ sont des entiers d'après $\wp(n)$. Donc $\dbinom{n+1}{p+1}$ est un entier.

  Finalement : pour tout $p \in [\![0, n+1]\!]$, $\dbinom{n+1}{p}$ est entier

  D'où $\wp(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que $\wp(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les nombres $\dbinom{n}{p}$ sont donc bien tous des entiers.

4.4.4. Triangle de Pascal[(1)]

La relation de Pascal permet de calculer les coefficient binomiaux de la façon suivante : pour trouver un certain coefficient, on additionne dans le tableau suivant les coefficients situés "juste au dessus" et "juste au dessus à gauche" entre eux :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	...	$p-1$	p	...	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
...											
$n-1$	1	$n-1$					$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$		1	
n	1	n						$\binom{n}{p}$		n	1

(1) Le tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à ce dernier qui écrivit en 1654 son "traité du triangle arithmétique" dans lequel il expose d'innombrables applications du triangle déjà connu de Tartaglia (1556), Stiefel (1543) et des Chinois (1303).

5. Formule du binôme de Newton

Ce paragraphe utilise le symbole "somme" : $\sum_{\text{valeur initiale de l'indice}}^{\text{valeur finale}} \text{quantité sommée}$.

Par exemple, $1 + x + x^2 + \ldots + x^p + \ldots + x^n$ pourra être noté de façon plus condensée : $\sum_{p=0}^{n} x^p$

<u>5.1. Théorème</u> *Formule du binôme de Newton*

Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

<u>Exemples</u> : à l'aide de cette formule et du triangle de Pascal, on retrouve des relations très utiles :

- Avec $n = 2$ la formule donne : $(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^2b^0 + \binom{2}{1} a^1b^1 + \binom{2}{2} a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Avec $n = 3$ la formule donne : $(a + b)^3 = \ldots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Avec $n = 4$ la formule donne : $(a + b)^4 = \ldots = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Notons qu'il n'est pas inutile de savoir substituer $(-b)$ à b dans la formule pour obtenir :

$$(a-b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} (-b)^p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

En pratique, les signes obtenus en développant cette dernière formule alternent ; par exemple :

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Il est aussi utile de savoir utiliser la formule avec des valeurs particulières de a et b :

- Lorsque $a = b = 1$: $$2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{p} + \ldots + \binom{n}{n}$$
- Lorsque $a = 1$ et $b = x$: $$(1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{p} x^p + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + x^n.$$
- Lorsque $a = 1$ et $b = -1$: $$0 = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p$$

<u>Démonstration 1 de la formule du binôme</u> :

En développant le produit $(a + b)^n = (a + b)(a + b) \ldots (a + b)$, on obtient 2^n termes : en effet, dans chacun des n facteurs, on a deux choix possibles pour constituer chaque terme qui est une n-liste d'éléments de l'ensemble $\{a ; b\}$ (nous n'utilisons pas ici la notation puissance). On peut répartir tous ces termes en fonction du nombre p de lettres b qu'ils contiennent ($0 \leqslant p \leqslant n$). Les termes contenant p lettres b sont de la forme "$a^{n-p}b^p$" et il y en a $\binom{n}{p}$. Étant en présence d'une partition, le principe de la somme nous livre alors le résultat.

Démonstration 2 de la formule du binôme (par récurrence) :

Soient a et b deux nombres complexes fixés.

On considère la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\wp(n) :\ (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

- On a $(a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{0} \binom{0}{p} a^{0-p} b^p = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ d'où $\wp(0)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\qquad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

  On a alors :

$$(a+b)^{n+1} = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i\right)(a+b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{(n+1)-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{(n+1)-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{(n+1)-i} b^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{(n+1)-i} b^i + b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right] a^{(n+1)-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{(n+1)-i} b^i$$

  D'où $\wp(n+1)$. On conclut d'après le principe de raisonnement par récurrence.

5.2. Applications

1) Nombre de parties d'un ensemble fini E de cardinal n :

   Notons E_p l'ensemble des parties de E de cardinal p. Par définition, on a Card(E_p) $= \binom{n}{p}$. En outre les ensembles $E_0, E_1, \ldots, E_p, \ldots, E_n$ constituent une partition de l'ensemble $\wp(E)$. Donc, d'après le principe de la somme :

$$\text{Card}(\wp(E)) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{p} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ (formule du binôme avec } a = b = 1)$$

   En conclusion, le nombre de parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n.

2) Linéarisation de lignes trigonométriques (ceci facilitera leur intégration). Exemple :

$$\sin^3 x = \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right)^3 = \frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} - 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-3\mathbf{i}x}}{-8\mathbf{i}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-3\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$$

3) Calcul de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. (Formules de Moivre)

4) Une relation bien utile : $\qquad \binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

5) Formule de Vandermonde. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   Démontrer que : $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i} = \binom{n_1+n_2}{k}$

(Piste : dans un ensemble X de cardinal $n_1 + n_2$, considérer deux sous-ensembles E et F **disjoints** de cardinal respectifs n_1 et n_2 et dénombrer de deux façons différentes le nombre de parties à k éléments de $E \cup F$)

6) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\binom{2n+2}{n+1}(n+1) - 4\binom{2n}{n}n = 2\binom{2n}{n}$

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0 ; n]\!]$. On considère la fonction $f_{n,\,p}$ définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_{n,\,p}(x) = \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$$

Démontrer que : $0 \leqslant f_{n,\,p} \leqslant 1$ sur $[0 ; 1]$.

(Indication : considérer la somme : $\sum_{p=0}^{n} f_{n,\,p}(x)$)

8) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $f'(x) = nx^{n-1}$

9) Existe-t-il trois coefficients binomiaux successifs sur une même ligne du triangle de Pascal qui soient en progression arithmétique ? Oui, par exemple : $\binom{14}{4} = 1001$; $\binom{14}{5} = 2002$; $\binom{14}{6} = 3003$.

Pour les déterminer tous, étudier la condition : $2\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p+1}$.

Montrer qu'elle s'écrit encore : $4p^2 - 4np + n^2 - n - 2 = 0$.

En déduire alors $p = \dfrac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}$ et que les couples du type $(n ; p)$ avec $n = \lambda^2 - 2$ ($\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0 ; 1 ; 2\}$) sont solutions.

6. Quelques lois de probabilités discrètes

6.1. Loi de Bernoulli et loi binomiale

6.1.1. Exemple introductif

La probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \dfrac{3}{4}$.

1) On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus. ($X = 0$, 1 ou 2)

   a) Calculer la probabilité des événements $(X = 0)$, $(X = 1)$ et $(X = 2)$. (On pourra s'aider d'un arbre "pondéré" et on désignera par **S** les succès et **E** les échecs).

   b) Calculer $\sum_{k=0}^{2} P(X = k)$.

2) On suppose maintenant qu'il fait six tirs et on note Y le nombre de succès obtenus. ($Y \in \{0 ; 1 ; ... ; 6\}$)

   On voudrait calculer la probabilité de l'événement $(Y = 4)$.

   a) Peut-on encore raisonner à l'aide d'un arbre ?

   b) Calculer la probabilité qu'il commence par quatre succès suivis de deux échecs.

c) Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Parmi les "mots" de six lettres qui ne contiennent que des **S** et des **E**, combien contiennent exactement quatre fois la lettre **S** ?

d) En déduire la probabilité de l'événement $(Y = 4)$.

<u>6.1.2. Définition</u> *Variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli*

Soit $\mathscr{E}$ une épreuve comportant deux issues (**S**uccès et **E**chec). On note p la probabilité de **S**uccès. Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de **S**uccès et 0 sinon. Alors, on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètres p. On note alors : $X \hookrightarrow B(1\,;p)$.

<u>Exemples</u> :

- Pile ou face.
- Lancer un dé et regarder si l'on obtient un 6 ou non.

<u>Exercice</u> :

Démontrer que si $X \hookrightarrow B(1\,;p)$ alors $X^2 \hookrightarrow B(1\,;p)$.

On a $X^2(\Omega) = \{0\,;1\}$ et $P(X^2 = 1) = P(X = 1) = p$, donc $X^2 \hookrightarrow B(1\,;p)$.

<u>6.1.3. Proposition</u> *Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli*

Si $X \hookrightarrow B(1\,;p)$, alors : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$ (où $q = 1 - p$)

<u>Démonstration</u> :

$$E(X) = P([X = 0]) \times 0 + P([X = 1]) \times 1 = q \times 0 + p \times 1 = p$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = E\left(X^2\right) - p^2$$

Et comme $X^2 \hookrightarrow B(1\,;p)$ (d'après l'exercice ci-dessus), on a : $E\left(X^2\right) = E(X) = p$.

Donc : $$V(X) = p - p^2 = pq$$

<u>6.1.4. Définition</u> *Schéma de Bernoulli*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque répète, de manière indépendante, n fois une même épreuve de Bernoulli de paramètre p, on dit que l'on fait un <u>schéma de Bernoulli</u>.

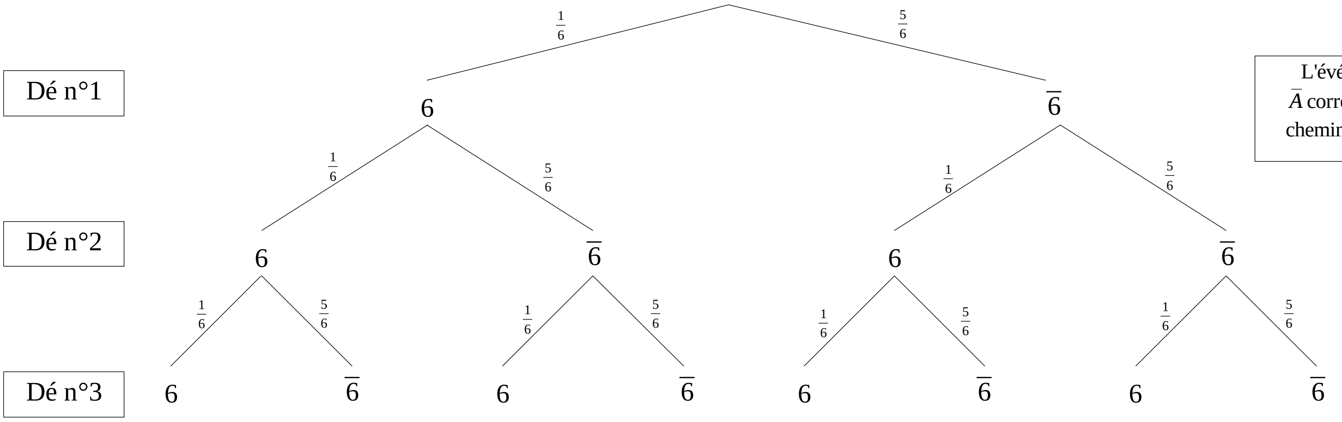
<u>Exemple</u> :

On lance n dés ($n \geqslant 1$). On note A l'événement "obtenir au moins un 6 (sur l'ensemble des n lancers)".

1. Décrire l'événement $\overline{A}$ à l'aide d'une phrase.
2. Faire un arbre et calculer $p(A)$ dans le cas où $n = 3$.
3. Dans cette question, on suppose n quelconque. Exprimer $p(A)$ en fonction de n.
4. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?

<u>Solution</u> :

1. $\overline{A}$ = "n'obtenir **aucun** 6 (sur l'ensemble des n lancers)"
2. Cas $n = 3$:



L'événement $\overline{A}$ correspond au chemin $\overline{6}\ \overline{6}\ \overline{6}$

$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$ d'où : $\qquad P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$

<u>Rappel</u> : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

3. En raisonnant de même que ci-dessus avec n dés, on a $P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ d'où :

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

4. Il s'agit de déterminer le plus petit entier n tel que :

$$P(A) \geqslant \frac{3}{4}$$

C'est-à-dire : $\qquad 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant \frac{3}{4}$

Isolons le terme $\left(\frac{5}{6}\right)^n$: $\qquad \frac{1}{4} \geqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Utilisons maintenant les logarithmes : $\qquad \ln \frac{1}{4} \geqslant \ln \left(\frac{5}{6}\right)^n$

<u>Rappel</u> :
$A \geqslant B \Leftrightarrow \ln A \geqslant \ln B$ pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$
(Cette propriété traduit la croissance du logarithme)

Or, $\ln \frac{1}{4} = -\ln 4$ et $\ln \left(\frac{5}{6}\right)^n = n \ln \frac{5}{6}$ d'où :

<u>Rappel</u> : $\ln(A^n) = n \ln A$ pour tout A de $]0 ; +\infty[$

$$-\ln 4 \geqslant n \ln \frac{5}{6}$$

Comme $\frac{5}{6} \in \,]0 ; 1[$, on a $\ln \frac{5}{6} < 0$. d'où :

<u>Rappel</u> : (Rappel $\ln x < 0 \Leftrightarrow x \in \,]0 ; 1[$)

On change le sens de l'inégalité si on multiplie (ou divise) par un nombre négatif !

$$\frac{-\ln 4}{\ln \frac{5}{6}} \leqslant n$$

Et comme $\frac{-\ln 4}{\ln \frac{5}{6}} \simeq 7{,}6$ et que n est un entier, on déduit :

$$n \geqslant 8$$

<u>Conclusion</u> : il faut lancer au moins 8 dés pour être sûr à 75% d'obtenir au moins un 6.

6.1.5. Définition *Variable aléatoire suivant une loi binomiale*

Soit $\mathscr{E}$ une épreuve de Bernoulli (épreuve comportant deux issues **S**uccès et **E**chec).

On note p la probabilité de **S**uccès.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On répète n fois de manière indépendante l'épreuve $\mathscr{E}$ et on note X la variable aléatoire égale au nombre de **S**uccès. (X est à valeurs dans $\{0 ; 1 ; ... , n\}$).

Dans ces conditions, on dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p.

On note parfois $X \hookrightarrow B(n ; p)$.

Exemple :

Reprenons la situation précédente (lancer de 3 dés) et notons X le nombre de 6 obtenus.

X est à valeurs dans $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

Calculons la probabilité d'obtenir exactement deux 6. D'après les règles sur les arbres, on a :

$$P(X=2) = P(6 - 6 - \overline{6}) + P(6 - \overline{6} - 6) + P(\overline{6} - 6 - 6) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72} \simeq 0{,}069 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Généralisons ce raisonnement :

6.1.6. Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

Pour tout $k \in \{0 ; 1 ; ... , n\}$, on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration :

La probabilité d'avoir k succès suivis de $n - k$ échecs est : $p^k (1-p)^{n-k}$

Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre... Voici un moyen de dénombrer toutes les possibilités d'apparition des succès et échecs : on considère l'ensemble des "mots" de n lettres qui ne contiennent que des **S** et des **E**. On sait qu'il y en a exactement $\binom{n}{k}$ qui contiennent exactement k fois la lettre **S** (et donc $n - k$ fois la lettre **E**).

On en déduit :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ et ceci pour tout } k \in \{0 ; 1 ; ... ; n\}.$$

Remarques :

1. Si on note q la probabilité d'**E**chec, on a : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
2. La probabilité d'avoir n succès est : $P(X=n) = p^n$
3. La probabilité d'avoir aucun succès est : $P(X=0) = q^n$

   Par conséquent, la probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - q^n$$

6.1.7. Proposition *Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli*

Si $X \hookrightarrow B(n\,;\,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,;\,1]$, alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq \ (\text{où } q = 1 - p)$$

Démonstration :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k$$

Or : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ d'où :

$$E(X) = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}$$

$$E(X) = np\left[p + (1-p)\right]^{n-1} = np$$

Mieux : puisque $X \hookrightarrow B(n\,;\,p)$, il existe des variables aléatoires (réelles) X_1, X_2, ... , X_n définies sur Ω, indépendantes, de loi de Bernoulli de même paramètre p telles que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Par linéarité de l'espérance : $$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Et d'après 6.1.3. : $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

De même : $$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Et comme X_1, X_2, ... , X_n sont indépendantes, on a : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

Et d'après 6.1.3. : $$V(X) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

Exemple :

Reprenons la situation de l'introduction : la probabilité qu'un tireur atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$.

On suppose qu'il tire $n = 7$ fois. On note X la variable aléatoire associant à cette expérience aléatoire le nombre de succès obtenus. Calculer son espérance et sa variance.

6.2. Autres lois discrètes

6.2.1. Loi hypergéométrique (Présenté sous forme d'activité)

1. Dans une population de N individus divisée en deux sous-populations A et B de proportions p et $1 - p$ respectivement, on prélève un échantillon E de n individus ($n \leqslant N$). On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus de l'échantillon E appartenant à la sous-population A.

   Montrer que : pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{\dbinom{pN}{k}\dbinom{(1-p)N}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$

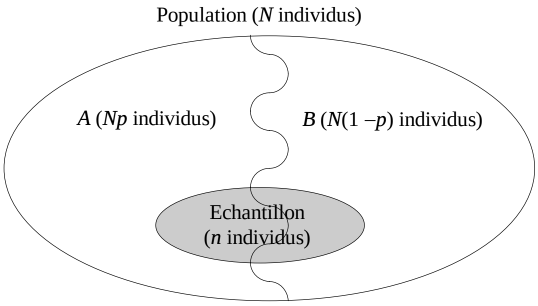
   Puis que : $E(X) = np$

2. Application : un joueur coche une grille de loto (il choisit 6 numéros parmi 49).

   Calculer la **probabilité qu'il obtienne k numéros gagnants** ($k \in [\![0, 6]\!]$). (Sans tenir compte du n° complémentaire)

   En moyenne, combien de numéros gagnants obtient-on en jouant une grille de loto ?

Solution :



1. On prélève un échantillon E de n individus. Donc :

$$\Omega = \text{ensemble des parties à } n \text{ éléments de la population}$$

$$\text{Card } \Omega = \binom{N}{n}$$

X est la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus de l'échantillon E qui sont dans A.

On a donc : $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons A_k l'événement :

A_k = "l'échantillon E contient k individus dans A (et donc $n - k$ dans B)"

Ainsi : $p(X = k) = \dfrac{\text{Card}(A_k)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\dbinom{pN}{k}\dbinom{(1-p)N}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$

On note : $X \hookrightarrow H(N, n, p)$

Et on dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p.

Calcul de l'espérance de la loi hypergéométrique :

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons X_i la variable aléatoire définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le } i^{\text{ème}} \text{ individu de } E \text{ est dans } A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

X_i est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Donc :

$$p(X_i = 1) = p$$

D'où : $$E(X_i) = p$$

Or, on a : $$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

D'où, par linéarité de l'espérance : $$E(X) = np$$

<u>Remarque</u> : on peut retrouver ce résultat en écrivant :

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, p(X = k)$$

et en utilisant la formule de Vandermonde.

2. L'univers Ω est l'ensemble des parties à 6 éléments de l'ensemble $[\![1\,;\,49]\!]$ et :

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{49}{6}$$

Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de numéros gagnants. On a :

$$X(\Omega) = [\![0\,;\,6]\!]$$

Alors : $$X \hookrightarrow H(49, 6, \tfrac{6}{49})$$

On a, pour tout $k \in [\![0\,;\,6]\!]$: $$p(X = k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

On trouve (à trois chiffres significatifs près) :

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(X = k)$	0,436	0,413	0,132	0,0177	$9{,}69 \times 10^{-4}$	$1{,}84 \times 10^{-5}$	$7{,}15 \times 10^{-8}$

$$E(X) = np = 6 \times \frac{6}{49} = \frac{36}{49} \simeq 0{,}735$$

En moyenne, on obtient moins d'un numéro gagnant par grille cochée.