

CHAPITRE : Echantillonnage

I Fluctuation d'échantillonnage

Définition 1

En statistiques, un échantillon de taille n est la liste des n résultats obtenus par n répétitions indépendantes de la même expérience.

Exemple 1

On lance un dé numéroté de 1 à 6, bien équilibré, et on repère le chiffre qui apparaît sur la face supérieure on répète ce lancer deux fois 100 fois et on obtient deux échantillons A et B de taille 100.

→ on a noté les fréquences d'apparition de chaque chiffre dans un tableau de distribution des fréquences :

| Chiffre | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------------|------|------|------|------|------|------|
| Fréquence A | 0,14 | 0,17 | 0,19 | 0,18 | 0,17 | 0,15 |
| Fréquence B | 0,15 | 0,16 | 0,16 | 0,18 | 0,17 | 0,18 |

Dans l'exemple précédent, on constate que les distributions des fréquences des deux échantillons ne sont pas les mêmes : c'est ce qu'on appelle la fluctuation d'échantillonnage.

La moyenne de l'échantillon A est de 3,52 et celle de B est 3,60.

II Intervalle de fluctuation

On se place dans le cas où on réalise une expérience aléatoire dont le résultat est soit un succès avec la probabilité p , soit un échec avec la probabilité $1 - p$. (appelée *expérience de Bernoulli*)

Propriété 1

Pour des probabilité p comprises entre 0,2 et 0,8 et $n \geq 25$, on peut assurer qu'au seuil de 95%, l'intervalle de fluctuation de la fréquence est $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

Cette propriété signifie que dans 95% des cas, la fréquence d'apparition d'un succès est située dans l'intervalle centré en p d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Exemple 2

Un joueur tire une carte dans un jeu de cartes, puis il la remet dedans. Il gagne si l'on obtient un « coeur ». Il renouvelle cette expérience n fois. La probabilité de gagner est donc de $p = 0,25$ à chaque fois.

- Si $n = 100$, dans 95% des cas, la fréquence d'apparition d'un coeur fluctue dans l'intervalle $[0,15 ; 0,35]$,
- Si $n = 10000$, dans 95% des cas, la fréquence d'apparition d'un coeur fluctue dans l'intervalle $[0,24 ; 0,26]$.

III Exemple de simulation

Exemple de simulation d'un lancer de deux dés :

On lance deux dés à six faces et on note la somme des chiffres figurant sur la face supérieure.

Question n°1 : Quels sont les résultats qu'il est possible d'obtenir ?

.....

Question n°2 : A votre avis, chacune de ces issues a-t-elle les mêmes chances de se réaliser ?

.....

Si la réponse est non, indiquer quelle est l'issue la plus probable.

.....

CALCULATRICE ET NOMBRES ALÉATOIRES

Nous allons simuler cette expérience grâce à la calculatrice.

En effet, la calculatrice a une fonction qui lui permet d'afficher un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 : la fonction random (hasard)

| Casio | ou | TI |
|---------------------|----|-----------------------------------|
| ♦ Menu RUN | | ♦ Taper MATH |
| ♦ Taper OPTN | | ♦ Sélectionner PRB (probabilités) |
| ♦ Sélectionner PROB | | ♦ Choisir RAND (nombre aléatoire) |
| ♦ Choisir RAN# | | ♦ Taper sur ENTER |
| ♦ Taper sur EXE | | |

Pour faire afficher un nouveau nombre aléatoire, il suffit d'appuyer à nouveau sur EXE ou ENTER/

Pour obtenir un entier, nous allons utiliser la fonction INT de la calculatrice qui permet d'afficher la partie entière d'un nombre :

| Casio | ou | TI |
|--------------|----|--------------------|
| ♦ OPTN | | ♦ MATH |
| ♦ NUM | | ♦ NUM (nombre) |
| ♦ INT | | ♦ INT (troncature) |

Nous cherchons, pour simuler notre lancer de deux dés, à faire afficher par la calculatrice la somme de deux nombres entiers aléatoires compris entre 1 et 6.

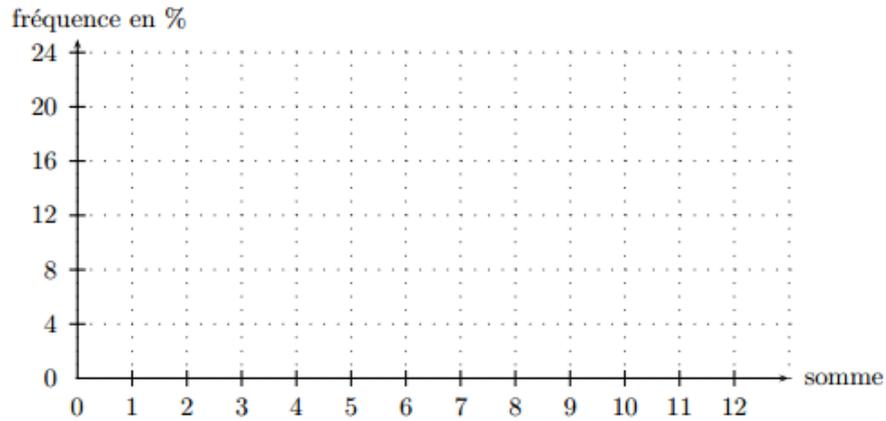
Pour cela, il suffit de taper la séquence suivante :

| Casio | ou | TI |
|---|----|---|
| ♦ $\text{INT}(6 \times \text{RAN}\# + 1) + \text{INT}(6 \times \text{RAN}\# + 1)$ | | ♦ $\text{INT}(6 \times \text{RAND} + 1) + \text{INT}(6 \times \text{RAND} + 1)$ |

Taper sur EXE ou ENTER, un nombre entier compris entre 2 et 12 s'affiche.

Question n°3 : Effectuez une série de 50 lancers, notez les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous puis construisez un diagramme en bâtons des fréquences relevées :

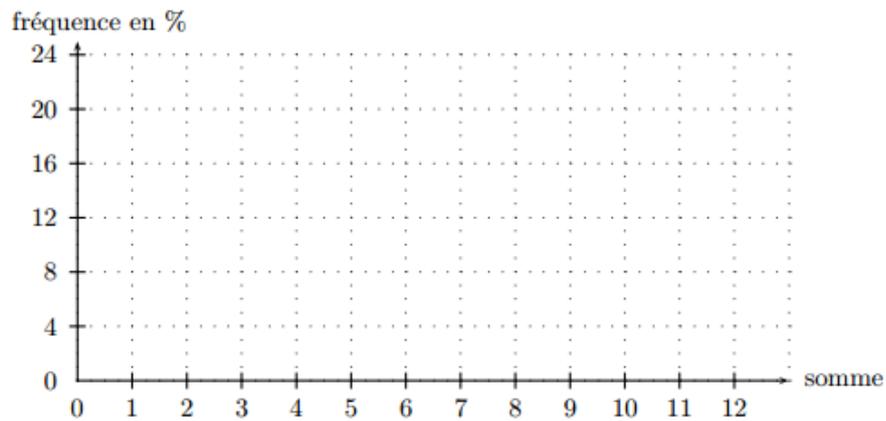
| | | | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|------------|
| somme | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Total |
| effectif | | | | | | | | | | | | 50 lancers |
| fréquence en % | | | | | | | | | | | | 100 % |



Question n°4 : Mise en commun des résultats.

Additionnez entre eux les résultats de toute la classe pour obtenir un échantillon beaucoup plus gros. Consignez les résultats dans le tableau puis construisez le diagramme en bâtons des fréquences.

| | | | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|-------------|
| somme | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Total |
| effectif | | | | | | | | | | | | ... lancers |
| fréquence en % | | | | | | | | | | | | 100 % |



Question n°5 : Nous avons trouvé des fréquences "expérimentales" de réalisation de chacune des issues de cette expérience aléatoire.

Ici, il est même possible de trouver les fréquences théoriques en utilisant un raisonnement très simple, nous pourrions alors comparer la théorie avec nos différents relevés.

Écrivez dans le tableau ci-dessous tous les résultats possibles (en premier, le résultat sur le premier dé et en second celui du deuxième dé) puis complétez le tableau de la somme des deux dés.

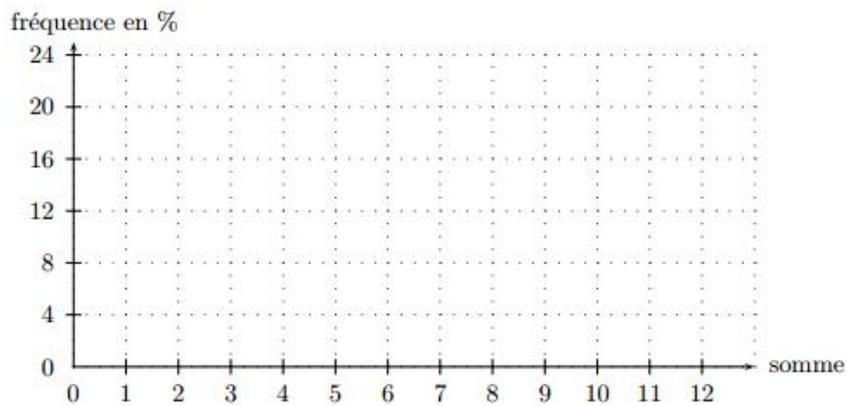
| Résultats | | | | | | Somme des deux dés | | | | | |
|-----------|--------|--------|--|--|--|--------------------|---|---|--|--|--|
| (1; 1) | (1; 2) | (1; 3) | | | | 2 | 3 | 4 | | | |
| (2; 1) | | | | | | 3 | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

Question n°6 : On souhaite compléter le tableau des fréquences théoriques.

Nous nous apercevons qu'il y a, par exemple, 3 façons d'obtenir le résultat 4 : (1; 3), (2; 2) et (3; 1).
 comme il y a 36 résultats possibles, l'issue « 4 » a donc une fréquence théorique de $\frac{3}{36} \approx 0,083$.

Complétez le tableau ci-dessous et faites le diagramme en bâtons des fréquences qui correspond.

| issue | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Total |
|--------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|-------|
| fréquence théorique en % | | | | | | | | | | | | 100 % |



Conclusion ???