# Estimation ponctuelle de la variance

Probabilités et statistique
1-620-96

Geneviève Gauthier

Dernière mise à jour : 14 février 2003

# Introduction

Nous cherchons à estimer la variance $\sigma^2$ d'une variable statistique $X$.

Nous travaillerons avec un échantillon aléatoire simple avec remise, c'est-à-dire que nous choisissons de façon indépendante $n$ individus de la population et, pour chacun d'eux, nous mesurons la variable $X$.

# Notation

$$X_i = \text{valeur de la variable } X \text{ chez le } i\text{ème individu de l'échantillon.} \tag{1}$$

Les variables

$$X_1, X_2, ..., X_n \tag{2}$$

sont donc indépendantes et identiquement distribuées. Nous notons leur espérance et leur écart-type par $\mu$ et $\sigma$ respectivement :

$$\mu = \mathsf{E}[X] \tag{3}$$
$$\text{et } \sigma^2 = \mathsf{Var}[X]. \tag{4}$$

# Estimation ponctuelle de la moyenne

Rappel. Nous avons déjà proposé un estimateur de $\mu$ sans biais et convergent. En effet, la moyenne échantillonnale

$$\overline{\overline{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5}$$

a une espérance égale à $\mu$,

$$\mathsf{E}\left[\overline{\overline{X}}_n\right] = \mu, \tag{6}$$

et une variance qui décroît vers zéro lorsque la taille de l'échantillon augmente

$$\mathsf{Var}\left[\overline{\overline{X}}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{7}$$

# Estimation ponctuelle de la variance

Rappelons que la variance est l'espérance des écarts à l'espérance au carré

$$\sigma^2 = \mathsf{Var}[X] \tag{8}$$

$$= \mathsf{E}\left[(X-\mu)^2\right]. \tag{9}$$

Par conséquent, nous proposons comme estimateur de la variance la moyenne échantillonnale des écarts à la moyenne au carré:

$$S^2_{essai\ 1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

Mais comme nous ne connaissons pas $\mu$, nous le remplacerons par son estimateur :

$$S^2_{essai\ 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2.$$

# Estimation ponctuelle de la variance

Notons que nous pouvons aussi commodément écrire

$$S^2_{essai\ 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}_n^2. \tag{10}$$

Preuve.

$$S^2_{essai\ 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2 \tag{11}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}_n+\overline{X}_n^2\right) \tag{12}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\overline{X}_n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_n^2 \tag{13}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}_n^2. \ \square \tag{14}$$

# Estimation ponctuelle de la variance

Est-ce que notre estimateur proposé est sans biais pour $\sigma^2$, c'est-à-dire, est-ce que

$$\mathsf{E}\left[S^2_{essai\ 2}\right] = \sigma^2 \ ? \tag{15}$$

Premièrement, notons que pour n'importe quelle variable aléatoire $Y$,

$$\mathsf{Var}[Y] = \mathsf{E}\left[Y^2\right] - (\mathsf{E}[Y])^2 \tag{16}$$

implique que

$$\mathsf{E}\left[Y^2\right] = \mathsf{Var}[Y] + (\mathsf{E}[Y])^2. \tag{17}$$

# Estimation ponctuelle de la variance.

Par conséquent,

$$\mathsf{E}\left[S^2_{essai\ 2}\right] = \mathsf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}_n^2\right] \tag{18}$$

$$= \mathsf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right] - \mathsf{E}\left[\overline{X}_n^2\right] \tag{19}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathsf{E}\left[X_i^2\right]}_{\substack{=\mathsf{Var}[X_i]+(\mathsf{E}[X_i])^2\\ =\sigma^2+\mu^2}} - \underbrace{\mathsf{E}\left[\overline{X}_n^2\right]}_{\substack{\mathsf{Var}\left[\overline{X}_n\right]+\left(\mathsf{E}\left[\overline{X}_n\right]\right)^2\\ =\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2}} \tag{20}$$

$$= \left(\sigma^2+\mu^2\right) - \left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{21}$$

# Estimation ponctuelle de la variance.

Notre deuxième essai produit un estimateur biaisé mais asymptotiquement sans biais, c'est-à-dire que

$$\mathsf{E}\left[S^2_{essai\ 2}\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

mais le biais disparaît lorsque la taille de l'échantillon croît vers l'infini:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[S^2_{essai\ 2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2.$$

**Définition.** Afin d'avoir un estimateur sans biais, nous utiliserons comme estimateur de $\sigma^2$ la variance échantillonnale

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2. \tag{22}$$

Comme

$$S^2 = \frac{n}{n-1}S^2_{essai\ 2},$$

alors

$$\mathsf{E}\left[S^2\right] = \frac{n}{n-1}\mathsf{E}\left[S^2_{essai\ 2}\right] = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

c'est-à-dire que $S^2$ est effectivement sans biais.