DÉNOMBREMENT : quelques exemples de référence

Comment savoir si l'on doit utiliser des *p*-listes, des arrangements ou des combinaisons ?

Les critères sont : les éléments peuvent-ils être **répétés** ? L'**ordre** des éléments est-il à prendre en compte ?

Critères	Les éléments peuvent être **répétés**	Les éléments sont **distincts**
On tient compte de l'ordre	Utiliser les ***p*-listes**	Utiliser les **arrangements**
On ne tient pas compte de l'ordre	Hors programme !	Utiliser les **combinaisons**

Exemple 1 :

Le loto : on tire, au hasard, 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles ? (On ne tient pas compte du numéro complémentaire)

- Peut-on obtenir plusieurs fois le même numéro lors d'un tirage ? ➜ Non ! Donc les éléments sont distincts.
- L'ordre d'apparition des différents numéros a-t-il de l'importance ? ➜ Non ! On considère les six numéros globalement ! (Si l'on obtient 15 - 18 - 29 -3 - 43 - 32 ou si l'on obtient 43 - 3 - 18 - 32 - 29 - 15, il s'agit du même tirage). Donc l'ordre n'a pas d'importance.

Nous devons donc utiliser les **combinaisons** !

Rappelons que $\binom{n}{p}$ **est le nombre de façons de choisir *p* objets parmi *n***. (Sans tenir compte de l'ordre)

Il y a donc $\binom{49}{6}$ = 13983816 tirages possibles.

(Remarque en passant : si vous cochez une grille au loto, vous aurez donc une chance sur 13983816 d'avoir les 6 numéros...)

Exemple 2 :

La course et le podium : dans une course de 100m, il y a huit partants numérotés de 1 à 8. Sur le podium, il y aura les trois médaillés (or - argent - bronze). Combien y a-t-il de podiums possibles ?
Convention d'écriture : on notera par exemple 2 - 5 - 3 le podium suivant : médaillé d'or : n°2 ; médaillé d'argent : n°5 et médaillé de bronze : n°3.

- Peut-on obtenir plusieurs fois le même numéro sur un podium ? ➜ Non ! Un même coureur ne peut pas être à la fois médaillé d'or et d'argent ! Donc les éléments sont distincts.
- L'ordre d'apparition des différents numéros sur le podium a-t-il de l'importance ? ➜ Oui ! Si l'on obtient le podium 6 - 4 - 3, cela signifie que le coureur n°6 a la médaille d'or. Tandis que le podium 4 - 6 - 3 signifie que c'est le coureur n°4 qui est en or. Le podium 4 - 6 - 3 n'est donc pas le même que le podium 6 - 4 - 3 ! Autrement dit l'ordre est ici déterminant.

Nous devons donc utiliser les **arrangements** !

Rappelons que A_n^p est le nombre d'arrangements de *p* objets choisis parmi *n*, c'est-à-dire le nombre de *p*-listes d'éléments distincts choisis parmi *n*.

Il y a donc A_8^3 = 336 podiums possibles.

Remarque : ce problème peut aussi se résoudre très simplement en raisonnant avec des cases :

Or	Argent	Bronze
N° 5	N° 3	N° 8

On a 8 choix pour la première case **et** 7 choix pour le seconde **et** enfin 6 choix pour la dernière :

Au total : $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

Exemple 3 :

Combien peut-on attribuer de numéros de téléphones portables (numéros à 10 chiffres commençant par 06) ?

Dans un n° de téléphone portable commençant par 06, il reste encore 8 autres chiffres.

Ces 8 chiffres forment une 8-liste de l'ensemble $E = \{0 ; 1 ; 2 ; ... ; 9\}$ (E contient 10 éléments)

Rappelons que le nombre de ***p*-listes** d'un ensemble E à n éléments est : n^p.

Ici, $n = 10$ et $p = 8$. Donc il existe $10^8 = 100\,000\,000$ (cent millions) de n° de téléphones portables !

On peut aussi retrouver ce résultat en raisonnant avec des cases.

Quand on utilise plusieurs combinaisons, faut-il additionner ou multiplier ?

Cela dépend de la situation ! Concrètement :

- Si les différentes étapes sont reliées par un "**et**", on **multiplie**.
- Si les différents cas sont reliés par un "**ou**", on **additionne**.

Exemple 4 :

Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une "main").

1. *Combien de mains contiennent exactement 2 dames **et** 1 roi ?*
2. *Combien de mains contiennent au moins 3 rois ? (C'est-à-dire 3 rois **ou** 4 rois)*

1. Nombre de façons de choisir les deux dames (parmi 4) :

   $$\binom{4}{2} = 6$$

   Nombre de façons de choisir un roi (parmi 4) : $\binom{4}{1} = 4$

   Nombre de façons de choisir les deux autres cartes (parmi 24 cartes restantes) :

   $$\binom{24}{2} = 276$$

   Bilan : au total : $\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{24}{2} = 6 \times 4 \times 276 = 6624$ mains.

2. Les mains qui contiennent au moins 3 rois sont celles qui contiennent 3 rois **ou** 4 rois :

   Nombre de mains qui contiennent 3 rois (**et** donc 2 autres cartes) :

   $$\binom{4}{3} \times \binom{28}{2}$$

   Nombre de mains qui contiennent 4 rois (**et** donc une autre carte) :

   $$\binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 28$$

Bilan : au total : $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + 28 = 1540$ mains.

Exemple 5 : Encore le loto (voir exemple 1)

On remplit une grille de loto (cela signifie que l'on a coché 6 numéros parmi 49). Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 numéros gagnants. (Sans tenir compte du n° complémentaire)

Avoir exactement 3 numéros gagnants, cela signifie :

avoir 3 numéros gagnants **et** 3 numéros perdants.

Nombre de façons de choisir 3 numéros gagnants (parmi 6) : $\binom{6}{3}$.

Nombre de façons de choisir 3 numéros perdants (parmi $49 - 6 = 43$) : $\binom{43}{3}$.

Bilan : au total : $\binom{6}{3} \times \binom{43}{3} = 20 \times 12341 = 246820$ grilles ont exactement 3 numéros gagnants.

Et d'après l'exemple 1, il y a $\binom{49}{6} = 13983816$ grilles possibles.

La probabilité d'avoir exactement 3 numéros gagnants est donc :

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\binom{6}{3} \times \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246820}{13983816} \simeq 0{,}01765.$$

(C'est-à-dire environ 1,765 % de chance.)

Comment calculer avec des coefficients C_n^p ?

Rappel : $\boldsymbol{n! = 1 \times 2 \times ... \times (n-1) \times n}$

Exemple : $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

Cas spéciaux : $2\,! = 1 \times 2 = 2$; $1\,! = 1$ et $\mathbf{0\,! = 1}$ (convention)

Formule générale : $\boldsymbol{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$

Quelques cas particuliers (à connaître) : $\boldsymbol{\binom{n}{0} = 1}$; $\boldsymbol{\binom{n}{1} = n}$

Propriété de symétrie : $\boldsymbol{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$. Exemple : $\binom{13}{9} = \binom{13}{4}$ (Le nombre de façons de choisir 9 objets parmi 13 est égal au nombre de façons de choisir 4 objets parmi 13. En effet, choisir 9 objets, c'est en laisser 4 et réciproquement)

Exemple 6 :

Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$: $\binom{n}{2} = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$

Voici un exercice curieux ! $\binom{n}{p}$ n'est constitué que de produits et on nous demande de démontrer qu'il peut être une somme !

- D'une part : $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

- D'autre part, $S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$ est la somme de $(n-1)$ termes d'une suite arithmétique de raison 1.

  En utilisant la formule $S = \dfrac{N(P+D)}{2}$ (voir cours sur les suites), on obtient :

$$S = \frac{(n-1)(1+n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

On a donc bien : $\binom{n}{2} = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$

Exemple 7 :

Démontrer que : $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ ($p \geqslant 1$ *et* $n \geqslant 1$)

Partons du membre de droite :

$$\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!} = \frac{n \times (n-1)!}{p \times (p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Utiliser la formule du binôme

Rappelons cette formule : pour tous réels (ou complexes) a et b et tout entier naturel n (non nul), on a :

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^{p} = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

Pour retrouver les valeurs des coefficients $\binom{n}{p}$ pour des petites valeurs de n, on utilise le **triangle de Pascal** :

$n = 0$ $\qquad \binom{0}{0} = \mathbf{1}$

$n = 1$ $\qquad \binom{1}{0} = \mathbf{1} \quad \binom{1}{1} = \mathbf{1}$

$n = 2$ $\qquad \binom{2}{0} = \mathbf{1} \quad \binom{2}{1} = \mathbf{2} \quad \binom{2}{2} = \mathbf{1}$

$n = 3$ $\qquad \binom{3}{0} = \mathbf{1} \quad \binom{3}{1} = \mathbf{3} \quad \binom{3}{2} = \mathbf{3} \quad \binom{3}{3} = \mathbf{1}$

$n = 4$ $\qquad \binom{4}{0} = \mathbf{1} \quad \binom{4}{1} = \mathbf{4} \quad \binom{4}{2} = \mathbf{6} \quad \binom{4}{3} = \mathbf{4} \quad \binom{4}{4} = \mathbf{1}$

$n = 5$ $\qquad \binom{5}{0} = \mathbf{1} \quad \binom{5}{1} = \mathbf{5} \quad \binom{5}{2} = \mathbf{10} \quad \binom{5}{3} = \mathbf{10} \quad \binom{5}{4} = \mathbf{5} \quad \binom{5}{5} = \mathbf{1}$

Exemple : $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Toujours vérifier que :

- Les exposants de a vont en décroissant (de n à 0)
- Les exposants de b vont en croissant (de 0 à n)
- La somme des exposants de a et b est, pour chaque terme, égale à n.

Quelle formule pour $\boldsymbol{(a-b)^n}$? Formule semblable avec les mêmes termes. On change juste le signe des termes dont l'exposant de b est un entier impair.

Exemple : $$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Exemple 8 :

Préciser le coefficient du terme $a^{24}b^2$ dans le développement de $(a+b)^{26}$.

D'après la formule du binôme : $(a+b)^{26} = a^{26} + \binom{26}{1} a^{25}b + \binom{26}{2} a^{24}b^2 + ...$

Le coefficient de $a^{24}b^2$ est donc : $\binom{26}{2} = 325$.

Exemple 9 :

1. *Démontrer que* : $$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2+3b^2)$$
2. *En déduire une simplification de l'expression* :
$$f(x) = \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^3 + \left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^3$$

1. On a :
$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 2\,a^3 + 6ab^2 = 2a(a^2+3b^2)$$
2. En appliquant la question 1 avec $a = x$ et $b = \sqrt{1+x^2}$, on obtient :
$$f(x) = 2x(\,x^2 + 3(1+\,x^2\,)) = 8\,x^3 + 6x$$
La fonction f est donc tout simplement une fonction polynôme de degré 3...