EXERCICES : Chapitre PROBABILITES **CORRECTION**

Exercice n° 1 Arbre ï Notion dôndépendance

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches.

Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches.

On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.

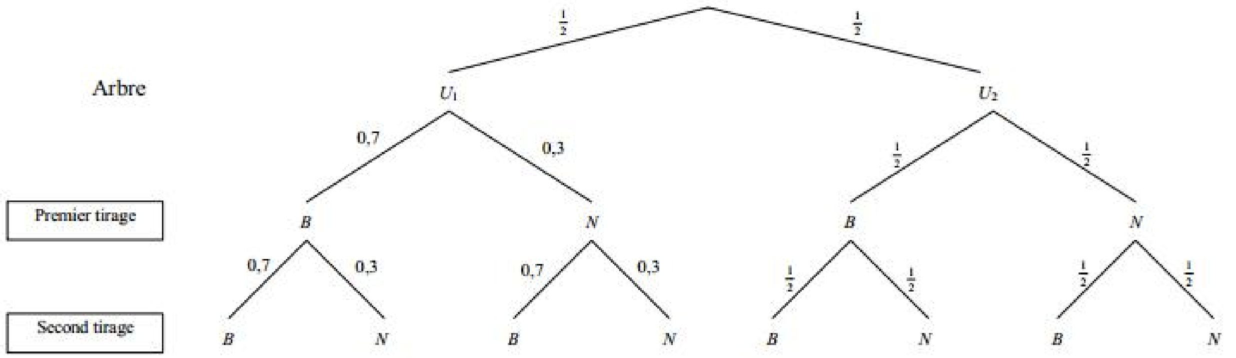
On note :

B_1 l'événement "obtenir une boule blanche au premier tirage"

B_2 l'événement "obtenir une boule blanche au second tirage"

Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Correction :



Comparons $p(B_1)p(B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$:

L'événement B_1 correspond au chemin $U_1\ B$ ou au chemin $U_2\ B$

$p(B_1) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}35 + 0{,}25 = 0{,}6$

L'événement B_2 correspond aux chemins U_1BB ; U_1NB ; U_2BB ; U_2NB

$p(B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}6$

Donc $p(B_1)p(B_2) = 0{,}36$.

L'événement $B_1 \cap B_2$ correspond aux chemins : U_1BB ; U_2BB

$p(B_1 \cap B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}37$.

Comme $p(B_1)p(B_2) \neq p(B_1 \cap B_2)$, on déduit : **$B_1$ et B_2 ne sont pas indépendants.**

<u>Remarque</u> : ce résultat peut paraître surprenant. Il est dû à la composition différente entre boules blanches et noires dans les deux urnes et qu'on ne sait pas, a priori, dans quelle urne seront effectués les tirages.

Exercice n° 2 Dénombrement ï Loi binomiale

Un fournisseur livre deux catégories de câbles C_1 et C_2.

Dans chaque livraison figurent 20% de câbles C_1 et 80% de câbles C_2.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie *A*

Dans cette partie, aucun calcul approché n'est demandé.

On prélève, au hasard, 4 câbles dans une livraison de 50 câbles.

1) Préciser la probabilité de l'événement E = "les 4 câbles sont du type C_1"

2) Préciser la probabilité de l'événement F = "1 câble est du type C_1 et 3 câbles sont du type C_2"

3) Préciser la probabilité de l'événement G = "au moins un câble est du type C_1"

Partie *B*

Dans cette partie, on prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience $\mathscr{E}$ et on note X le nombre de câbles C_1 obtenus.

1) On suppose que $n = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1.

b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un câble de type C_1.

c) Calculer l'espérance $E(X)$.

2) Dans cette question n est inconnu.

a) Exprimer $P(X \geqslant 1)$ en fonction de n.

b) Combien de fois faut-il réaliser l'expérience $\mathscr{E}$ pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C_1 ?

Correction partie A :

Il y a donc 10 câbles du type C_1 et 40 câbles du type C_2 dans la livraison.

Notons qu'il y a $\binom{50}{4}$ façons de choisir 4 câbles parmi 50.

1) Nombre de façons de choisir 4 câbles de type C_1 : $\binom{10}{4}$

D'où : $$P(E) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{3}{3290} \simeq 0{,}00091 \text{ à } 10^{-5} \text{ près}$$

2) Nombre de façons de choisir 1 câble du type C_1 : 10

Nombre de façons de choisir 3 câbles du type C_2 : $\binom{40}{3}$

D'où : $$P(F) = \frac{10 \times \binom{40}{3}}{\binom{50}{4}} = \frac{988}{2303} \simeq 0{,}429 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

3) On a : $\overline{G}$ = "aucun câble n'est du type C_1" = "les 4 câbles sont du type C_2"

Nombre de façons de choisir 4 câbles du type C_2 : $\binom{40}{4}$

D'où : $$P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - \frac{\binom{40}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{13891}{23030} \simeq 0{,}603 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Correction partie B :

Comme le tirage se fait avec remise, les n réalisations de l'expérience $\mathscr{E}$ se font de manière identiques et indépendantes. On a ainsi un schéma de Bernoulli. La probabilité d'obtenir un câble du type C_1 étant égale à 0,2 on peut affirmer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0{,}2$.

On a donc pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} 0{,}2^k \times 0{,}8^{n-k}$$

1) $n = 4$.

a) Probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1 :

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} 0{,}2^2 \times 0{,}8^2 = 0{,}1536$$

b) Probabilité d'obtenir au moins un câble de type C_1 :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^4 = 0{,}5904$$

c) L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est donnée par :

$$E(X) = np = 4 \times 0{,}2 = 0{,}8$$

Er 2) Dans cette question n est inconnu.

a) On a : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$

b) On cherche n tel que : $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$

$$1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}9$$

$$0{,}8^n \leqslant 0{,}1$$

Par croissance du logarithme : $n \ln 0{,}8 \leqslant \ln 0{,}1$

Et comme $\ln 0{,}8 < 0$: $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8}$

La calculatrice donne : $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \simeq 10{,}32$ à 10^{-2} près

Et comme n est un entier : $n \geqslant 11$

On doit répéter l'expérience $\mathscr{E}$ au moins 11 fois pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C_1.

Exercice n° 3 Arbre ï Test de séropositivité

Un individu est tiré au hasard d'une population dans laquelle une personne sur 10000 est séropositive.

On lui fait passer un test de dépistage de séropositivité.

Sachant que le test est positif, **quelle est la probabilité que la personne soit effectivement séropositive** ?

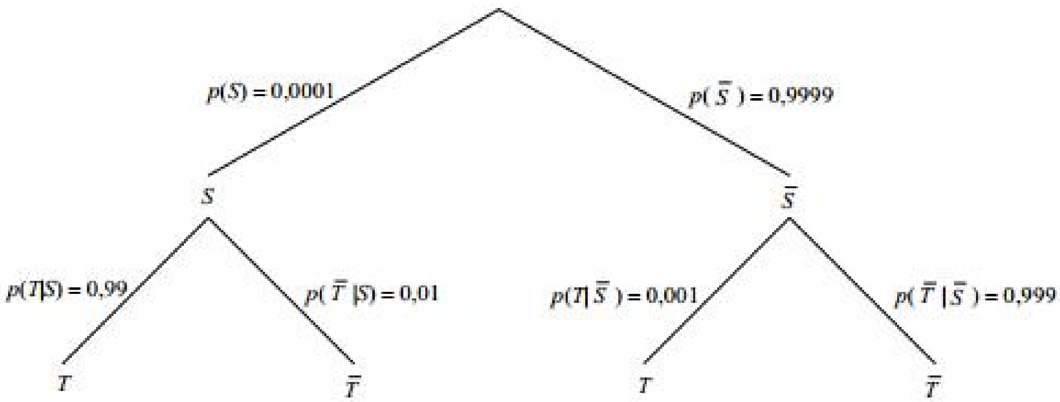
Données :

- Si on est séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,99.
- Si on n'est pas séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,001.

Correction :

Notons S l'événement "l'individu est séropositif" et T "le test est positif"

Illustrons la situation à l'aide d'un arbre :



$$p(S|T) = \frac{p(S \cap T)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)p(S)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)p(S)}{p(T \mid S)p(S) + p(T \mid \bar{S})p(\bar{S})} = \frac{1}{1 + \frac{p(T \mid \bar{S})p(\bar{S})}{p(T \mid S)p(S)}} \simeq 0{,}090 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Conclusion : même si le test est positif, on a environ 9 chances sur 100 de ne pas être malade !

Exercice n° 4 Calcul dùune espérance et dùun écart type

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

   J = "tirer une boule jaune"

   B = "tirer une boule bleue"

   R = "tirer une boule rouge"

   V = "tirer une boule verte"

2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est :
   - rouge, on gagne 10 €
   - verte, on gagne 2 €
   - jaune ou bleue, on gagne 3 €

   Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

   a. Déduire de la question 1) : $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 10)$.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance puis son écart−type. (On arrondira l'écart-type à 10^{-2})

3. Maintenant, on gagne toujours 10 € si la boule tirée est rouge, 2 € si elle est verte mais on gagne 3 € si elle est jaune et m € si elle est bleue ; m désignant un réel positif.

   Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €.

Correction :

1. Comme chaque boule a autant de chance d'être tirée, on est dans une situation d'**équiprobabilité**. La probabilité p d'un événement peut donc se calculer à l'aide de la formule :

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On a ainsi :

$$P(J) = \frac{3}{10} \qquad P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \qquad P(R) = \frac{1}{10} \qquad P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2. a. On a : $P(X = 2) = P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Comme les événements J et B sont incompatibles, on a :

$$P(J \cup B) = P(J) + P(B)$$

D'où : $$P(X = 3) = P(J \cup B) = P(J) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 10) = P(R) = \frac{1}{10}$$

b. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous

Valeurs de X	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 10$
probabilités	$p_1 = \frac{4}{10}$	$p_2 = \frac{5}{10}$	$p_3 = \frac{1}{10}$

L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = \frac{4}{10} \times 2 + \frac{5}{10} \times 3 + \frac{1}{10} \times 10 = \frac{33}{10} = 3,3$$

La variance de X est donnée par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

$$V(X) = \frac{4}{10} \times 2^2 + \frac{5}{10} \times 3^2 + \frac{1}{10} \times 10^2 - 3,3^2 = 16,1 - 10,89 = 5,21$$

Et enfin, l'écart-type de X est donné par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X) = \sqrt{5,21} \simeq 2,28$$

3. Notons Y la nouvelle variable aléatoire correspondant au gain moyen dans cette situation.

La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

Valeurs de Y	$y_1 = 2$	$y_2 = 3$	$y_3 = m$	$y_4 = 10$
probabilités	$p_1 = \frac{4}{10}$	$p_2 = \frac{3}{10}$	$p_3 = \frac{2}{10}$	$p_4 = \frac{1}{10}$

On souhaite avoir : $E(Y) = 4,5$

C'est à dire : $\frac{4}{10} \times 2 + \frac{3}{10} \times 3 + \frac{2}{10} \times m + \frac{1}{10} \times 10 = 4,5$

$$27 + 2m = 45$$

$$m = 9$$

Il faut donc que la boule bleue rapporte 9 € pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €.

Exercice n° 5 Etude d'une variable aléatoire **X + Y**

L'expérience consiste à lancer simultanément 2 dés identiques non pipés à 6 faces (un dé rouge et un dé noir)

Soit X la variable aléatoire qui permet de noter le résultat du dé rouge
Soit Y la variable aléatoire qui permet de noter le résultat du dé noir

1) *Tracer le tableau de probabilité de la variable* **X** *et calculer l'espérance* $E(X)$ *et la variance* $V(X)$

2) *Tracer le tableau de probabilité de la variable* **Y** *et calculer l'espérance* $E(Y)$ *et la variance* $V(Y)$

3) *Soit* $Z = X + Y$ *une nouvelle variable aléatoire (on note la somme des nombres obtenus sur chacune des 2 faces supérieures)*

1) *Donner la liste de tous les événements élémentaires de* Z
Conseil : Tracer un tableau lignes-colonnes qui liste tous les résultats possibles
2) *Tracer le tableau de probabilité de la variable* Z
3) *Calculer l'espérance* $E(Z)$ *et la variance* $V(Z)$
4) *Comparer* $E(Z)$ *avec* $E(X)$ *et justifier ce résultat*

Correction :

X	1	2	3	4	5	6
P(X=x_i)	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667

Somme	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Z = X + Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(Z = z_i)	0,0278	0,0556	0,0833	0,1111	0,1389	0,1667	0,1389	0,1111	0,0833	0,0556	0,0278

$$E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = 3,5$$

$$\mathrm{Var}(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2 = 1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}-(3{,}5)^2 \approx 2{,}927$$

donc

$E(X) = E(Y) = 3{,}5$ et $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) \approx 2{,}927$

Par un calcul on vérifie que $E(Z) = \sum z_i \times P(Z = z_i) = 7$

On constate que $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}5+3{,}5 = 7$

Explication : l'Espérance d'une V.A. est un « opérateur linéaire » :
Si X et Y sont 2 v.a. (ayant une espérance et définies sur le même « *espace probabilisé* »)
on admettra qu'on peut calculer E (X+Y) et E(aX)) et que :
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(a\times X) = a\times E(X)$ avec a un nombre quelconque

Exercice n° 6 Etude d'un dé « *pipé* »

Un dé à 6 faces est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de « chance de sortir » qu'un chiffre impair.

1) Calculer la probabilité d'obtenir un 6

2) Calculer l'espérance et la variance et l'écart type de cette variable aléatoire

3) On lance deux fois ce dé :
- **1)** Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6
- **2)** Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair

Correction : Soit X la variable aléatoire qui consiste à noter le nombre sur la face supérieure de ce dé

On a $P(X=2) = P(X=4) = P(X=6) = 2\times P(X=1)$

et $P(X=1) = P(X=3) = P(X=5)$

Comme $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = 1$

on obtient que
$P(X=1) + 2\times P(X=1) + P(X=1) + 2\times P(X=1) + P(X=1) + 2\times P(X=1) = 1$

c'est à dire $9\times P(X=1) = 1 \Leftrightarrow P(X=1) = \frac{1}{9}$

Réponse question n° 1 : $P(X=6) = 2\times P(X=1) = 2\times\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

Réponse question n° 2 : $E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i) = 1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{1}{9}+6\times\frac{2}{9} \approx 3{,}7$

Réponse question n° 3 : En dessinant un arbre de probabilité on obtient que :

$P(X_1 = 6 \text{ et } X_2 = 6) = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81} \approx 0{,}05$