Exercice 1 *Variables aléatoires et arbres*

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablette, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

On note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :

   G = "le client achète une tablette gagnante"

   U = "le client gagne exactement une place de cinéma"

   D = "le client gagne exactement deux places de cinéma"

   a) Donner $P(G)$, $P_G(U)$ et $P_G(D)$

   b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

   c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.

   Déterminer la loi de probabilité de X.

   Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.

   a) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.

   b) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.

   c) Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29.

Exercice 2 *Détermination de la composition d'une urne pour obtenir une espérance de gain souhaitée*

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

   J = "tirer une boule jaune"

   B = "tirer une boule bleue"

   R = "tirer une boule rouge"

   V = "tirer une boule verte"

2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est :

   - rouge, on gagne 10 €
   - verte, on gagne 2 €
   - jaune ou bleue, on gagne 3 €

   Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

   a. Déduire de la question 1) : $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 10)$.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance puis son écart–type. (On arrondira l'écart-type à 10^{-2})

3. Maintenant, on gagne toujours 10 € si la boule tirée est rouge, 2 € si elle est verte mais on gagne 3 € si elle est jaune et m € si elle est bleue ; m désignant un réel positif.

   Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €.

Exercice 3 *Problème de déconditionnement*

Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement M_1, M_2 et M_3.

La moitié des appareils de son stock provient de M_1, un huitième de M_2, et trois huitièmes de M_3.

Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque M_1 sont rouge, que 5% des appareils de la marque M_2 sont rouges et que 10% des appareils de la marque M_3 le sont aussi.

On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste : (on donnera les résultats sous forme de fractions)

1. Quelle est la probabilité qu'il vienne de M_3 ?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vienne de M_2 ?
3. Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge ?
4. Après examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est rouge.

   Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque M_1 ?

Exercice 4 *Probabilités conditionnelles et suite arithmético-géométrique*

Un fumeur essaye de réduire sa consommation. On admet qu'il fonctionne toujours suivant les conditions :

- C_1 : S'il reste un jour sans fumer, alors il fume le lendemain avec une probabilité de 0,4.
- C_2 : Par contre, s'il cède et fume un jour, alors la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,2.

On note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ème}}$ jour.

Déterminer la limite de p_n. Conclusion ?

Exercice 5 *Loi de l'équilibre génétique lors de l'appariements au hasard - Loi de Hardy-Weinberg*

Certains gènes peuvent avoir deux états : A (allèle dominant) ou a (allèle récessif).

Les couples de gènes sur des paires de chromosomes n'ayant pas forcément les mêmes allèles, un individu donné peut avoir l'un des trois génotypes suivants :

$$AA \text{ ou } Aa \text{ ou } aa$$

Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents.

Exemples :

- si un parent a le génotype AA et l'autre Aa, l'enfant sera du type AA ou Aa avec des probabilités égales à $\frac{1}{2}$.
- si un parent a le génotype Aa et l'autre Aa, l'enfant sera du type AA ou Aa ou aa avec des probabilités égales à $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ respectivement.

On note p_n, q_n et r_n les proportions des génotypes AA, Aa, aa de la génération n.

1. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau à deux entrées, faire apparaître tous les cas possibles d'appariements et les génotypes de l'enfant qui en découlent.
2. En déduire les proportions p_{n+1}, r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n.
3. On note $\alpha = p_0 - r_0$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\qquad p_n - r_n = \alpha$

   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_{n+1}, r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction du seul paramètre α.

   En déduire que pour $n \geqslant 1$, les suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont **constantes**.

   Ce résultat est connu sous le nom de "loi de l'équilibre génétique de Hardy-Weinberg". Ainsi, quelles que soient les proportions initiales des trois génotypes, la répartition est stabilisée dès la génération suivante.

Exercice 6 *Variables aléatoires et dénombrement*

Un marchand de glaces propose dix parfums au choix pour des glaces en cornet. Trois élèves choisissent, au hasard et indépendamment l'un de l'autre, un des parfums proposés.

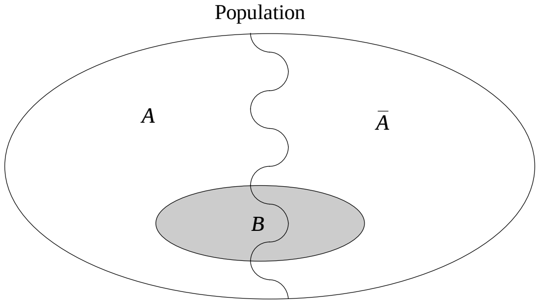
1. Calculer la probabilité de l'événement A : "les trois élèves choisissent des parfums deux à deux distincts"
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parfums choisis par les trois élèves.

   Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Exercice 7 *Sur la double partition d'une population. Différents cas de figure*

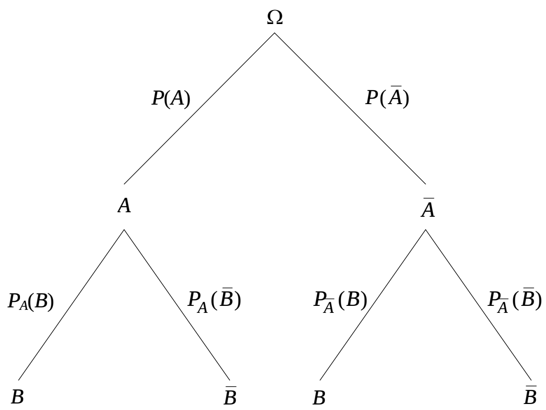
On considère une population Ω. Sur chaque individu de cette population, on étudie deux caractères A et B.

On peut schématiser cette situation à l'aide du diagramme suivant :



Elle n'a pas une belle tête cette figure ?

Autre représentation possible à l'aide d'un arbre :



Beaucoup de situations, en probabilités, se modélisent par une double partition.

Démontrer que la connaissance de 3 probabilités parmi les suivantes permet de déterminer toutes les autres :

$$P(A),\ P(B),\ P_A(B),\ P_{\bar{A}}(B),\ P_B(A),\ P_{\bar{B}}(A)$$

Exercice 8 *Loi hypergéométrique, loi de Bernoulli, loi binomiale*

1. Une grande enveloppe contient les douze "figures" d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire, simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.

   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique. Interpréter.
2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des cinq tirages.

   Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Exercice 9 *Notion d'indépendance - Utilisation d'un arbre.*

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches.

Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches.

On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.

On note :

B_1 l'événement "obtenir une boule blanche au premier tirage"

B_2 l'événement "obtenir une boule blanche au second tirage"

Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 10 *Dénombrement - Loi binomiale*

Un fournisseur livre deux catégories de câbles C_1 et C_2.

Dans chaque livraison figurent 20% de câbles C_1 et 80% de câbles C_2.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie *A*

Dans cette partie, aucun calcul approché n'est demandé.

On prélève, au hasard, 4 câbles dans une livraison de 50 câbles.

1) Préciser la probabilité de l'événement E = "les 4 câbles sont du type C_1"

2) Préciser la probabilité de l'événement F = "1 câble est du type C_1 et 3 câbles sont du type C_2"

3) Préciser la probabilité de l'événement G = "au moins un câble est du type C_1"

Partie *B*

Dans cette partie, on prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience $\mathscr{E}$ et on note X le nombre de câbles C_1 obtenus.

1) On suppose que $n = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

   a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1.

   b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un câble de type C_1.

   c) Calculer l'espérance $E(X)$.

2) Dans cette question n est inconnu.

   a) Exprimer $P(X \geqslant 1)$ en fonction de n.

   b) Combien de fois faut-il réaliser l'expérience $\mathscr{E}$ pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C_1 ?

Exercice 11 *Test de séropositivité*

Un individu est tiré au hasard d'une population dans laquelle une personne sur 10000 est séropositive.

On lui fait passer un test de dépistage de séropositivité.

Sachant que le test est positif, **quelle est la probabilité que la personne soit effectivement séropositive** ?

Données :

- Si on est séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,99.
- Si on n'est pas séropositif, alors le test est positif avec une probabilité de 0,001.

Exercice 12 *Comparaison de l'efficacité de deux vaccins.*

Deux laboratoires pharmaceutiques proposent chacun leur vaccin contre une maladie.

On dispose des données suivantes :

- Un quart de la population a utilisé le vaccin A. Un cinquième le vaccin B.
- Lors d'une épidémie, on constate que sur 1000 malades, 8 ont utilisé le vaccin A et 6 le vaccin B.

On choisit un individu au hasard dans la population et on note :

$$M = \text{"l'individu est malade"} \quad \text{et} \quad V = \text{"l'individu est vacciné"}$$

On appelle "indicateur d'efficacité" d'un vaccin le réel :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{V}}(M)}{P_V(M)} = \frac{\text{probabilité qu'un individu non vacciné soit malade}}{\text{probabilité qu'un individu vacciné soit malade}}$$

Plus l'indicateur λ est grand, plus la vaccin est efficace.

Calculer λ pour chacun des deux vaccins. Que peut-on en déduire ?

Exercice 13 *Pertinence d'un test de dépistage*

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est x.

On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on voudrait étudier sa fiabilité.

On dispose des données suivantes :

- on effectue le test de dépistage à 100 personnes considérées comme malades : 98 ont un test positif.
- on effectue le test de dépistage à 100 personnes considérées comme saines : 1 seule a un test positif.

On choisit au hasard un individu de cette population et on le soumet au test.

On note : $M = \text{"l'individu est malade"}$

$T = \text{"l'individu a un test positif"}$

On note $f(x)$ la probabilité qu'un personne ayant un test positif soit malade.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x. Tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 0,95.

   Le test est-il fiable si la proportion x d'individus atteints de la maladie est de 0,05 (5%) ?

   À partir de quelle proportion x le test est-il fiable ?

Exercice 14 *Estimation de la composition d'une urne.*

1. On remplit une urne avec des jetons blancs et des jetons noirs. À chaque étape, il y autant de chance de rajouter dans l'urne un jeton noir qu'un blanc. On s'arrête lorsque l'urne contient 10 jetons.

   On note X le nombre de jetons blancs dans l'urne.

   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance $E(X)$.
2. Une urne a été remplie suivant le protocole précédent mais on ignore sa composition en jetons blancs et en jetons noirs. On tire successivement et avec remise, dix jetons de cette urne. On obtient 4 fois un jeton blanc et 6 fois un jeton noir. Calculer la probabilité que l'urne contienne 4 jetons blancs et 6 jetons noirs.

Exercice 15 *Inégalité de Markov - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

X désigne une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs x_1, x_2, ... x_n rangées dans l'ordre croissant : $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

1. Démontrer l'inégalité de Markov. Pour tout réel $a > 0$:

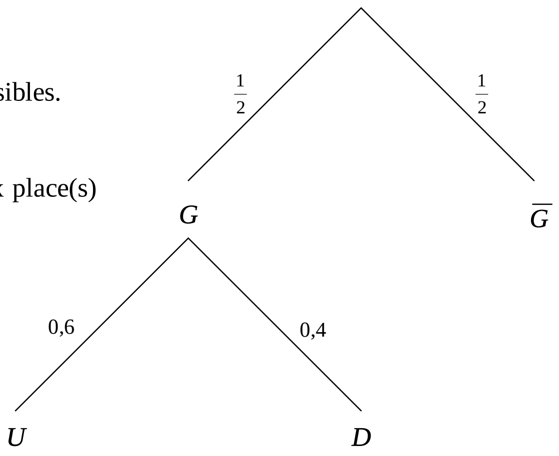
$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

   Application : selon ses fournisseurs, sa matière première et sa disponibilité plus ou moins aléatoires, un producteur réalise en moyenne 20 objets par semaine. Quelle est, au plus, la probabilité de produire au moins 40 objets par semaine ?

2. A l'aide de l'inégalité de Markov, déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\text{Pour tout } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

Exercice 1 *Variables aléatoires et arbres*



1. a) L'arbre ci-contre décrit les différentes situations possibles.

Soit la tablette est gagnante, soit elle ne l'est pas.

Si elle est gagnante, elle contient soit une, soit deux place(s) de cinéma.

On a immédiatement :

$P(G) = \dfrac{1}{2}$

$P_G(U) = 0{,}6$

$P_G(D) = 0{,}4$

b) L'événement "gagner exactement une place de cinéma" est $G \cap U$.

D'après les formules de cours (ou à l'aide de l'arbre), on a :

$$P(G \cap U) = P(U \cap G) = P_G(U)\ P(G) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$$

c) Calculons la probabilité de gagner respectivement 0, 1 et 2 place(s) de cinéma.

$P(X = 0) = P(\overline{G}) = 0{,}5$

$P(X = 1) = P(G \cap U) = 0{,}3$

$P(X = 2) = P(G \cap D) = P_G(D)\ P(G) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

X	0	1	2	Total
Probabilités	0,5	0,3	0,2	1

L'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X est donnée par la formule :

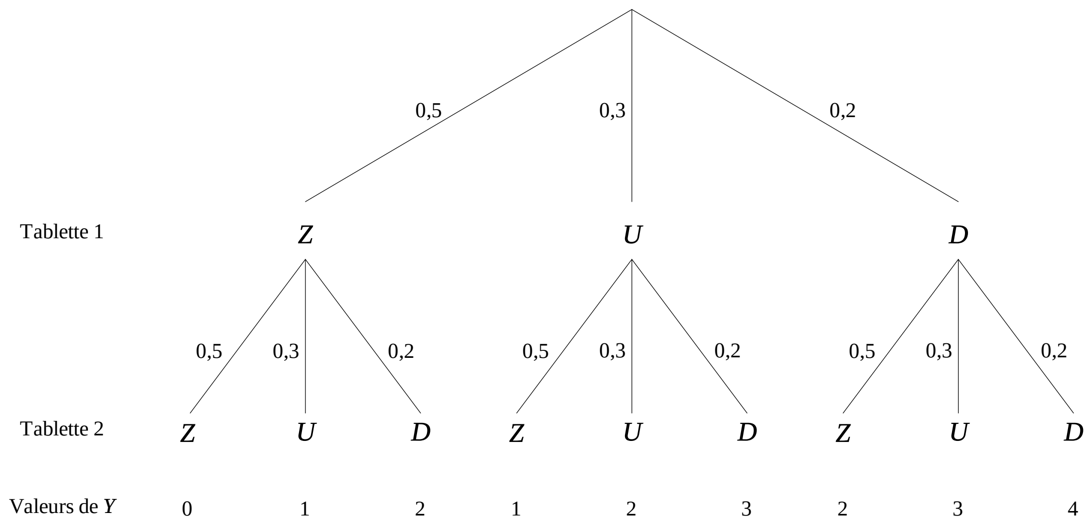
$$E(X) = \sum_i p_i x_i = 0{,}5 \times 0 + 0{,}3 \times 1 + 0{,}2 \times 2 = 0{,}7$$

2. Notons Y la variable aléatoire correspondant au nombre de tablettes gagnées par ce client.

Les différentes valeurs possibles de Y sont : 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4.

L'arbre ci-dessous illustre toutes les situations possibles :

(On a noté Z l'événement "la tablette rapporte zéro place de cinéma". En fait, $Z = \overline{G}$)



a) Probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma : $P(Y=0) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$ (Chemin *Z*-*Z* sur l'arbre)

b) L'événement "il gagne au moins une place de cinéma" est le contraire de l'événement "il ne gagne aucune place de cinéma" : $P(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y=0) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

c) Probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma :

$$P(Y=2) = 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}29$$

(Chemins *D*-*Z* ou *U*-*U* ou *Z*-*D*)

Exercice 2 *Détermination de la composition d'une urne pour obtenir une espérance de gain souhaitée*

1. Comme chaque boule a autant de chance d'être tirée, on est dans une situation d'**équiprobabilité**. La probabilité p d'un événement peut donc se calculer à l'aide de la formule :

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On a ainsi :

$$P(J) = \frac{3}{10} \qquad P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \qquad P(R) = \frac{1}{10} \qquad P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2. a. On a : $$P(X=2) = P(V) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Comme les événements J et B sont incompatibles, on a :

$$P(J \cup B) = P(J) + P(B)$$

D'où : $$P(X=3) = P(J \cup B) = P(J) + P(B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=10) = P(R) = \frac{1}{10}$$

b. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous

Valeurs de X	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 10$
probabilités	$p_1 = \frac{4}{10}$	$p_2 = \frac{5}{10}$	$p_3 = \frac{1}{10}$

L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = \frac{4}{10} \times 2 + \frac{5}{10} \times 3 + \frac{1}{10} \times 10 = \frac{33}{10} = 3{,}3$$

La variance de X est donnée par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

$$V(X) = \frac{4}{10} \times 2^2 + \frac{5}{10} \times 3^2 + \frac{1}{10} \times 10^2 - 3{,}3^2 = 16{,}1 - 10{,}89 = 5{,}21$$

Et enfin, l'écart-type de X est donné par :$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X) = \sqrt{5{,}21} \simeq 2{,}28$$

3. Notons Y la nouvelle variable aléatoire correspondant au gain moyen dans cette situation.

La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

Valeurs de Y	$y_1 = 2$	$y_2 = 3$	$y_3 = m$	$y_4 = 10$
probabilités	$p_1 = \frac{4}{10}$	$p_2 = \frac{3}{10}$	$p_3 = \frac{2}{10}$	$p_4 = \frac{1}{10}$

On souhaite avoir : $$E(Y) = 4,5$$

C'est à dire : $$\frac{4}{10} \times 2 + \frac{3}{10} \times 3 + \frac{2}{10} \times m + \frac{1}{10} \times 10 = 4,5$$

$$27 + 2m = 45$$

$$m = 9$$

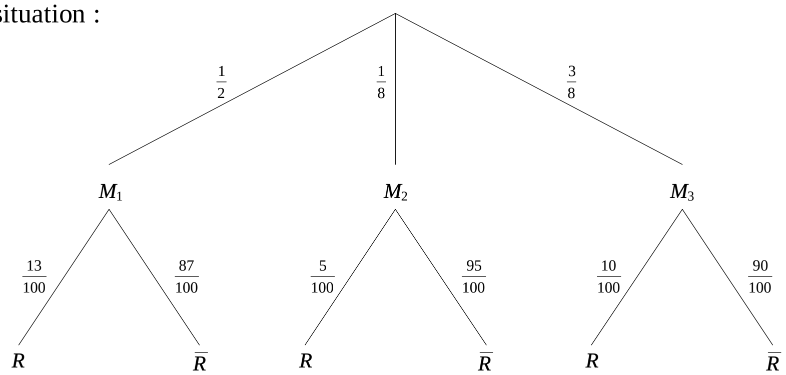
Il faut donc que la boule bleue rapporte 9 € pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €.

Exercice 3 *Problème de déconditionnement*

Notons :

R l'événement "l'appareil choisi est rouge" et M_i = "l'appareil choisi provient de la marque M_i", $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Arbre illustrant la situation :



1) La probabilité que l'appareil vienne de M_3 est $P(M_3) = \dfrac{3}{8}$. (On a de même $P(M_1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(M_2) = \dfrac{1}{8}$)

2) La probabilité que l'appareil soit rouge sachant qu'il vienne de M_2 est :

$$P_{M_2}(R) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

On a de même : $$P_{M_1}(R) = \frac{13}{100} \quad \text{et} \quad P_{M_3}(R) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

3) Comme les événements M_1, M_2 et M_3 constituent une partition de l'univers, on a, d'après le théorème des probabilités totales :

$$P\left(\overline{R}\right) = P_{M_1}\left(\overline{R}\right)p(M_1) + P_{M_2}\left(\overline{R}\right)P(M_2) + P_{M_3}\left(\overline{R}\right)P(M_3) = \frac{87}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{95}{100} \times \frac{1}{8} + \frac{90}{100} \times \frac{3}{8} = \frac{713}{800}$$

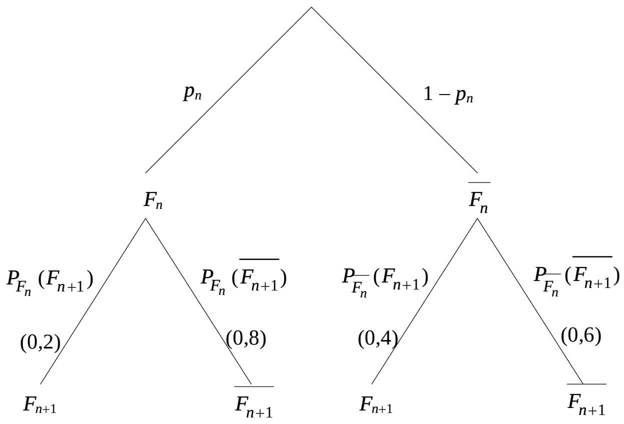
4) Il s'agit de calculer $P_R(M_1)$:

$$P_R(M_1) = \frac{P(M_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P_{M_1}(R)P(M_1)}{1 - P(\overline{R})} = \frac{13/100 \times 1/2}{87/800} = \frac{52}{87}$$

Exercice 4 *Probabilités conditionnelles et suite arithmético-géométrique*

Notons F_n l'événement "l'individu fume le $n^{\text{ème}}$ jour".

Illustrons, à l'aide d'un arbre la situation entre le $n^{\text{ème}}$ jour et le $(n+1)^{\text{ème}}$ jour :



D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $\Omega = F_n \cup \overline{F_n}$, on a :

$$p_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(F_{n+1} \cap F_n) + P(F_{n+1} \cap \overline{F_n}) = P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n})$$

$$p_{n+1} = P_{F_n}(F_{n+1})p_n + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})(1 - p_n) = 0{,}2p_n + 0{,}4(1 - p_n)$$

$$p_{n+1} = -0{,}2p_n + 0{,}4$$

Soit ω le réel tel que : $\omega = -0{,}2\omega + 0{,}4$

En soustrayant membre à membre : $p_{n+1} - \omega = -0{,}2(p_n - \omega)$

La suite $(p_n - \omega)$ est donc géométrique de raison $q = -0{,}2$, d'où :

$$p_n - \omega = (-0{,}2)^n p_0$$

On ne connaît pas p_0 mais cela ne nous empêche pas d'étudier la limite. On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} (-0{,}2)^n = 0$$

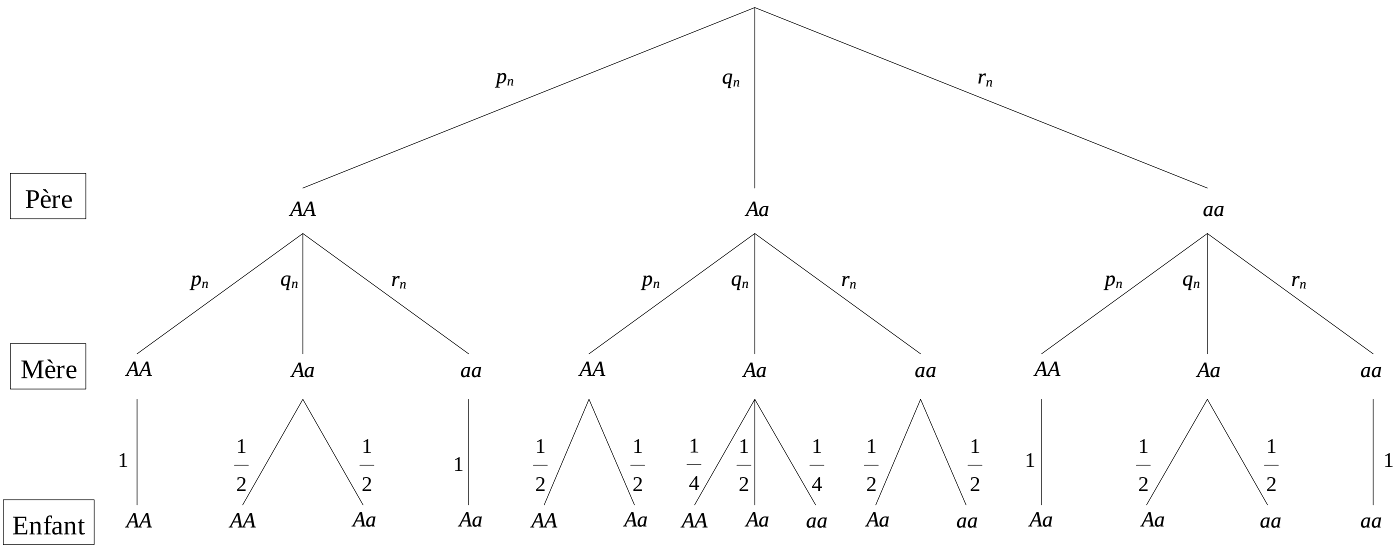
(Limite d'une suite géométrique de raison $q = 0{,}2 \in \left]-1, 1\right[$)

D'où : $$\lim_{n\to+\infty} p_n = \omega = \frac{1}{3}$$

Conclusion : avec ces données, à long terme, notre individu tendra à fumer un jour sur trois. Impossible de s'arrêter complètement tant que les conditions C_1 et C_2 sont appliquées. Notons que cette limite est indépendante de la probabilité initiale p_0. Autrement dit, que notre individu soit un grand ou un petit fumeur, au bout du compte, il fumera en moyenne un jour sur trois.

Exercice 5 *Loi de l'équilibre génétique lors de l'appariements au hasard - Loi de Hardy-Weinberg*

1.



2. D'après les règles de calculs sur les arbres, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} = p_n^2 + \frac{1}{2}p_nq_n + \frac{1}{2}p_nq_n + \frac{1}{4}q_n^2 = p_n^2 + p_nq_n + \left(\frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2$$

De même :

$$r_{n+1} = \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2$$

Et puisque $p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} = 1$:

$$q_{n+1} = 1 - \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2$$

3. a) D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} - r_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2 = (p_n - r_n)(p_n + q_n + r_n) = p_n - r_n$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Ceci peut se démontrer proprement par récurrence.

$$p_n - r_n = p_0 - r_0 = \alpha$$

b) On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(p_n - r_n + \frac{2r_n + q_n}{2}\right)^2$$

$$p_n + \frac{q_n}{2} = p_n - r_n + \frac{2r_n + q_n}{2}$$

Et comme $p_n - r_n = \alpha$ et $2r_n + q_n = 1 - p_n + r_n = 1 - \alpha$, on obtient :

$$p_n + \frac{q_n}{2} = \alpha + \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2}$$

D'où :

$$p_{n+1} = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2$$

De même :

$$\frac{q_n}{2} + r_n = \frac{q_n + 2p_n}{2} + r_n - p_n = \frac{1 + p_n - r_n}{2} + r_n - p_n = \frac{1+\alpha}{2} - \alpha = \frac{1-\alpha}{2}$$

D'où : $$r_{n+1} = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$$

Et enfin : $$q_{n+1} = 1 - \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1-\alpha^2}{2}$$

On a prouvé que les suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont constantes à partir du rang $n = 1$.

Exercice 6 *Variables aléatoires et dénombrement*

1. Pour calculer la probabilité de A, on utilise la formule :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Première méthode : (simple et naturelle)

Calcul du nombre de cas possibles :

Le premier élève a **10** choix de parfums.

Le second élève a **10** choix de parfums.

Le troisième élève a **10** choix de parfums.

Au total, nous obtenons : $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$ cas possibles.

Calcul du nombre de cas favorables :

Le premier élève a **10** choix de parfums.

Le second élève a **9** choix de parfums. (Car on souhaite qu'il ait un parfum différent du premier)

Le troisième élève a **8** choix de parfums. (Car on souhaite qu'il ait un parfum différent des deux premiers)

Au total, nous obtenons : $10 \times 9 \times 8 = 720$ cas favorables.

Bilan : $$P(A) = \frac{720}{1000} = \frac{18}{25} = 0{,}72$$

Deuxième méthode : (utilisant des notions de dénombrement)

Notons E l'ensemble $\{a ; b ; c ; d ; e ; f ; g ; h ; i ; j\}$ où chaque lettre désigne un parfum.

À chaque choix de parfum des trois élèves, on peut associer une **liste**. Par exemple, la liste ***gag*** signifie que le premier élève a choisi le parfum ***g***, le second le parfum ***a*** et le troisième le parfum ***g***.

Le nombre de cas possibles est égal au nombre de 3-listes de l'ensemble E. Il y en a $10^3 = 1000$.

Le nombre de cas favorables est égal au nombre de 3-listes d'éléments distincts de l'ensemble E, c'est-à-dire au nombre de 3-arrangements de E. Il y en a $A_{10}^3 = 720$.

On retrouve : $$P(A) = \frac{720}{1000} = \frac{18}{25} = 0{,}72$$

2. Les différentes valeurs possibles de X sont 1 ou 2 ou 3.

On sait déjà, d'après la question 1 que : $P(X = 3) = P(A) = \dfrac{18}{25}$

Calcul de $P(X = 1)$:

Nombre de cas favorables : $10 \times 1 \times 1$. (Le premier élève a 10 choix, les deux suivants sont contraints de prendre le même parfum).

D'où : $$P(X=1) = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$$

Par ailleurs, les événements "$X = 1$", "$X = 2$" et "$X = 3$" forment une partition de l'univers. On a donc :

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

D'où : $$P(X=2) = 1 - P(X=1) - P(X=3) = 1 - \frac{1}{100} - \frac{18}{25} = \frac{27}{100}$$

Remarque : on peut aussi calculer $P(X = 2)$ directement :

nombre de cas favorables : nombre de 3-listes de E qui contiennent 2 lettres distinctes (et donc une lettre répétée deux fois) :

choix de la lettre répétée : 10 choix. (Exemple *g*)

choix de l'autre lettre (distincte de la lettre répétée) : 9 choix (Exemple *a*)

choix de la position de la lettre non répétée : 3 choix (*agg* ou *gag* ou *gga*)

Au total : $10 \times 9 \times 3 = 270$ cas favorables.

On retrouve bien : $$P(X=2) = \frac{270}{1000} = \frac{27}{100}$$

On résume maintenant la loi de probabilité de X sous forme de tableau :

X	1	2	3	Total
Probabilités	0,01	0,27	0,72	1

Calcul de l'espérance mathématique de X :

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = 0{,}01 \times 1 + 0{,}27 \times 2 + 0{,}72 \times 3 = 2{,}71$$

En moyenne, le nombre de parfums distincts choisis par les trois élèves est 2,71.

Exercice 7 *Sur la double partition d'une population. Différents cas de figure*

Premier cas : on connaît $P(A)$, $P(B)$ et une probabilité conditionnelle

Supposons connue $P_A(B)$ (Méthode analogue si c'est une autre probabilité conditionnelle qui est donnée)

On peut alors calculer :

$$P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$$

D'où : $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (1)$$

En utilisant la formule des probabilité totales, on a :

Avec la partition $\Omega = A \cup \overline{A}$: $$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

C'est-à-dire : $$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)(1 - P(A))$$

D'où : $$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(B) - P_A(B)P(A)}{1 - P(A)} \qquad (2)$$

Et avec la partition $\Omega = B \cup \overline{B}$: $$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)(1 - P(B))$$

D'où : $$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A) - P_B(A)P(B)}{1 - P(B)} \qquad (3)$$

On a bien retrouvé les 3 probabilités restantes.

Deuxième cas : on connaît $P(A)$ mais pas $P(B)$ (ou le contraire) et deux probabilités conditionnelles

Supposons connues : $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$

Par la formule des probabilités totales appliquée à la partition $\Omega = A \cup \bar{A}$, on a :

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)(1 - P(A))$$

On est ramené au premier cas.

Supposons connues : $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$

On calcule alors : $P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$

D'où : $$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P_B(A)}$$

On est ramené au premier cas.

Si ce sont d'autres probabilités conditionnelles qui sont connues, on raisonne de manière analogue.

Troisième cas : on connaît trois probabilités conditionnelles

Supposons, par exemple, connues : $P_A(B)$, $P_{\bar{A}}(B)$ et $P_B(A)$

D'une part : $P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$

D'autre part : $P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)(1 - P(A))$

D'où : $$P_A(B)P(A) = P_B(A)[P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)(1 - P(A))]$$

$$P(A)[P_A(B) - P_B(A)P_A(B) + P_{\bar{A}}(B)] = P_B(A)\, P_{\bar{A}}(B)$$

$$P(A) = \frac{P_B(A)P_{\bar{A}}(B)}{P_A(B) - P_B(A)P_A(B) + P_{\bar{A}}(B)}$$

On est ramené au deuxième cas.

Exercice 8 *Loi hypergéométrique, loi de Bernoulli, loi binomiale*

1. Le nombre de façons de choisir 5 cartes parmi 12 est : $\binom{12}{5}$

   Le nombre de façons de choisir k rois ($k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$) parmi 4 est : $\binom{4}{k}$

   Le nombre de façons de choisir $5 - k$ autres cartes (non rois) parmi les 8 restantes est : $\binom{8}{5-k}$

   On a donc : $$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{12}{5}}$$ pour tout $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

   À l'aide de la calculatrice, on obtient :

X	0	1	2	3	4	Total
Probabilités	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{42}{99}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$	1

   Calcul de l'espérance mathématique de X :

   $$E(X) = \sum_i p_i x_i = \frac{165}{99} = \frac{5}{3}$$

   En moyenne, le nombre de rois obtenus, par cette méthode de tirage, est $\frac{5}{3}$ ($\simeq 1{,}67$).

2. Soit $\mathscr{E}$ l'expérience : "on tire, au hasard et avec remise, **une** carte de l'enveloppe et on regarde si c'est un roi"

Cette expérience aléatoire possède **deux issues** : obtenir un roi (Succès) ou non (Echec).

C'est donc une **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p = P(\text{Succès}) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

On **répète, de manière indépendante**, $n = 5$ fois cette épreuve de Bernoulli.

La variable aléatoire Y (nombre de rois obtenus) représente le **nombre de succès** obtenus ($0 \leqslant Y \leqslant 5$)

On peut donc affirmer que la variable aléatoire Y est **binomiale** de paramètre $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{3}$:

$$Y \hookrightarrow B\left(5\,;\frac{1}{3}\right)$$

Dans ce cas, on sait alors que :

$$P(Y = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k} \quad \text{pour tout } k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient (à 10^{-3} près) :

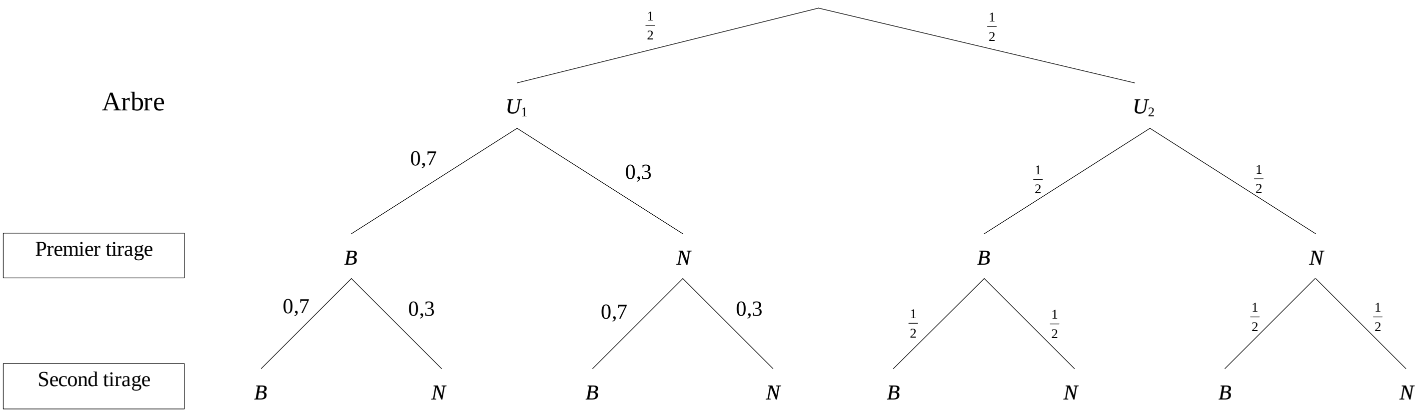
Y	0	1	2	3	4	5	Total
Probabilités	0,132	0,329	0,329	0,165	0,041	0,004	1

Espérance mathématique de Y : $\qquad E(Y) = np = 5 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

En moyenne, le nombre de rois obtenus, par cette méthode de tirage, est $\dfrac{5}{3}$ ($\simeq 1{,}67$).

Exercice 9 *Notion d'indépendance - Utilisation d'un arbre.*

Arbre



Comparons $p(B_1)p(B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$:

L'événement B_1 correspond au chemin $U_1\,B$ ou au chemin $U_2\,B$

$p(B_1) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}35 + 0{,}25 = 0{,}6$

L'événement B_2 correspond aux chemins U_1BB ; U_1NB ; U_2BB ; U_2NB

$p(B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}6$

Donc $p(B_1)p(B_2) = 0{,}36$.

L'événement $B_1 \cap B_2$ correspond aux chemins : U_1BB ; U_2BB

$p(B_1 \cap B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}37$.

Comme $p(B_1)p(B_2) \neq p(B_1 \cap B_2)$, on déduit : **$B_1$ et B_2 ne sont pas indépendants.**

<u>Remarque</u> : ce résultat peut paraître surprenant. Il est dû à la composition différente entre boules blanches et noires dans les deux urnes et qu'on ne sait pas, a priori, dans quelle urne seront effectués les tirages.

Exercice 10 *Dénombrement - Loi binomiale*

Partie *A*

Il y a donc 10 câbles du type C_1 et 40 câbles du type C_2 dans la livraison.

Notons qu'il y a $\binom{50}{4}$ façons de choisir 4 câbles parmi 50.

1) Nombre de façons de choisir 4 câbles de type C_1 : $\binom{10}{4}$

D'où :
$$P(E) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{3}{3290} \simeq 0{,}00091 \text{ à } 10^{-5} \text{ près}$$

2) Nombre de façons de choisir 1 câble du type C_1 : 10

Nombre de façons de choisir 3 câbles du type C_2 : $\binom{40}{3}$

D'où :
$$P(F) = \frac{10 \times \binom{40}{3}}{\binom{50}{4}} = \frac{988}{2303} \simeq 0{,}429 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

3) On a : $\overline{G}$ = "aucun câble n'est du type C_1" = "les 4 câbles sont du type C_2"

Nombre de façons de choisir 4 câbles du type C_2 : $\binom{40}{4}$

D'où :
$$P(G) = 1 - P(\overline{G}) = 1 - \frac{\binom{40}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{13891}{23030} \simeq 0{,}603 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Partie *B*

Comme le tirage se fait avec remise, les n réalisations de l'expérience $\mathscr{E}$ se font de manière identiques et indépendantes. On a ainsi un schéma de Bernoulli. La probabilité d'obtenir un câble du type C_1 étant égale à 0,2 on peut affirmer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0{,}2$.

On a donc pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} 0{,}2^k \times 0{,}8^{n-k}$$

1) $n = 4$.

a) Probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1 :

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} 0{,}2^2 \times 0{,}8^2 = 0{,}1536$$

b) Probabilité d'obtenir au moins un câble de type C_1 :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^4 = 0{,}5904$$

c) L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale est donnée par :

$$E(X) = np = 4 \times 0{,}2 = 0{,}8$$

En moyenne, on obtient 0,8 câble du type C_1.

2) Dans cette question n est inconnu.

a) On a : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$

b) On cherche n tel que : $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$

$$1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}9$$

$$0{,}8^n \leqslant 0{,}1$$

Par croissance du logarithme : $n \ln 0{,}8 \leqslant \ln 0{,}1$

Et comme $\ln 0{,}8 < 0$: $n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8}$

La calculatrice donne : $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \simeq 10{,}32$ à 10^{-2} près

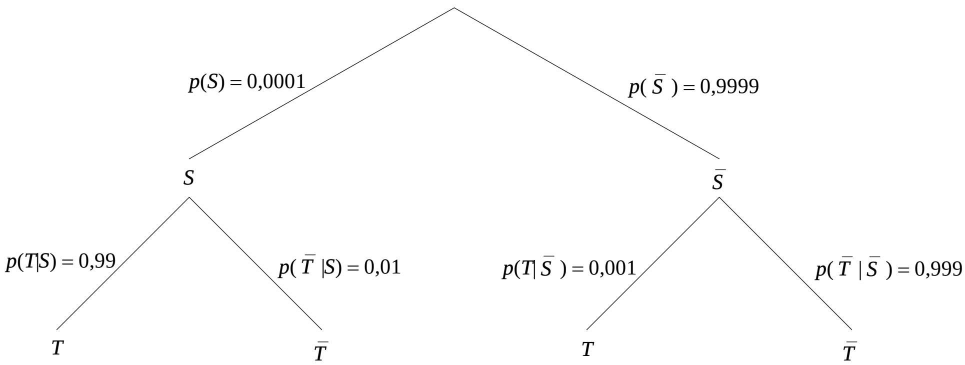
Et comme n est un entier : $n \geqslant 11$

On doit répéter l'expérience $\mathscr{E}$ au moins 11 fois pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C_1.

Exercice 11 *Test de séropositivité*

Notons S l'événement "l'individu est séropositif" et T "le test est positif"

Illustrons la situation à l'aide d'un arbre :



$$p(S|T) = \frac{p(S \cap T)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)p(S)}{p(T)} = \frac{p(T \mid S)p(S)}{p(T \mid S)p(S) + p(T \mid \bar{S})p(\bar{S})} = \frac{1}{1 + \dfrac{p(T \mid \bar{S})p(\bar{S})}{p(T \mid S)p(S)}} \simeq 0{,}090 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Conclusion : même si le test est positif, on a environ 9 chances sur 100 de ne pas être malade !

Voir l'exercice n°13 sur la pertinence d'un test de dépistage

Exercice 12 *Comparaison de l'efficacité de deux vaccins.*

On a :

$$\lambda = \frac{P_{\overline{V}}(M)}{P_V(M)} = \frac{P(M\cap\overline{V})P(V)}{P(M\cap V)P(\overline{V})} = \frac{P_M(\overline{V})P(M)P(V)}{P_M(V)P(M)P(\overline{V})} = \frac{P_M(\overline{V})P(V)}{P_M(V)P(\overline{V})} = \frac{(1-P_M(V))P(V)}{P_M(V)(1-P(V))}$$

<u>Vaccin A</u> :

$$\lambda_A = \frac{(1-0,008)\times 0,25}{0,008\times(1-0,25)} \simeq 41,33 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

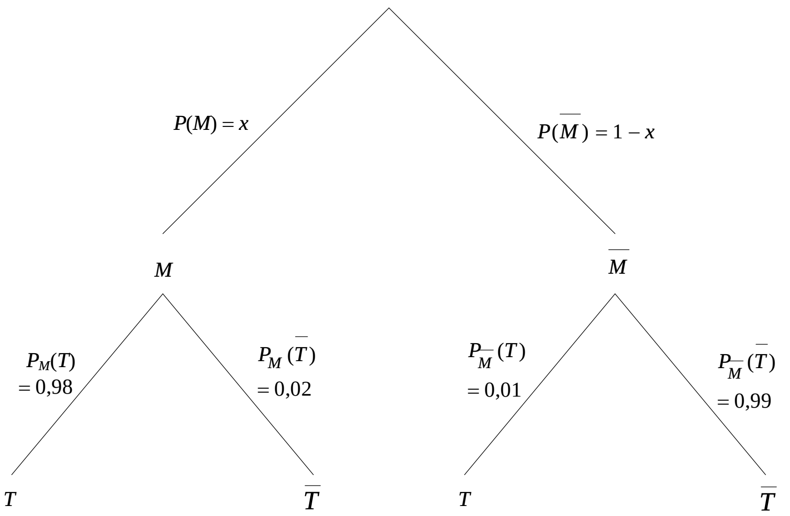
<u>Vaccin B</u> :

$$\lambda_B = \frac{(1-0,006)\times 0,2}{0,006\times(1-0,2)} = 41,42 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Les deux vaccins ont quasiment la même efficacité...

L'effectif de la population étudiée est bien trop faible pour tirer des conclusion plus précises.

Exercice 13 *Pertinence d'un test de dépistage*



1. Notons Ω la population.

   On a : $$f(x) = P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)}$$

   Et d'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $\Omega = M\cup\overline{M}$:

   $$P(T) = P(T\cap M) + P(T\cap\overline{M})$$

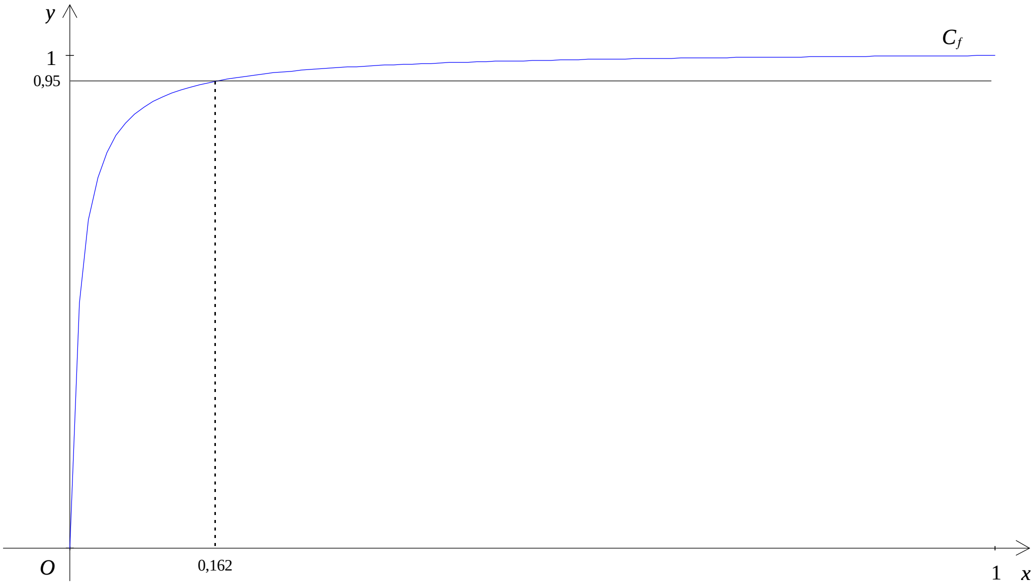
   D'où : $$f(x) = \frac{P(M\cap T)}{P(T\cap M)+P(T\cap\overline{M})}$$

   $$f(x) = \frac{P_M(T)x}{P_M(T)x+P_{\overline{M}}(T)(1-x)} = \frac{P_M(T)x}{\left(P_M(T)-P_{\overline{M}}(T)\right)x+P_{\overline{M}}(T)}$$

   Application numérique avec $P_M(T) = 0,98$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$

$$f(x) = \frac{0{,}98x}{0{,}97x+0{,}01} = \frac{98x}{97x+1}$$

Représentation graphique de la fonction f :



2. On a : $$f(0{,}05) = \frac{98\times 0{,}05}{97\times 0{,}05+1} \simeq 0{,}8376 \text{ à } 10^{-4} \text{ près}$$

Le test n'est pas fiable si 5% de la population est malade...

On résout l'inéquation : $$f(x) \geqslant 0{,}95$$

$$\frac{98x}{97x+1} \geqslant 0{,}95$$

Et comme $97x + 1 > 0$ (car $0 \leqslant x \leqslant 1$) :

$$98x \geqslant 0{,}95 \times 97x + 0{,}95$$

$$5{,}85x \geqslant 0{,}95$$

$$x \geqslant \frac{19}{117}$$

Or, $\frac{19}{117} \simeq 0{,}16239$ à 10^{-5} près. On en déduit :

le test est fiable si au moins 17% de la population est malade (au pourcent près)

Exercice 14 *Estimation de la composition d'une urne.*

1. Considérons l'expérience aléatoire $\mathscr{E}$ consistant à choisir un jeton blanc ou un jeton noir.

   Cette expérience comporte **deux** issues, il s'agit d'une expérience de **Bernoulli**.

   Notons S l'événement "obtenir un jeton blanc". Par équirépartition, la probabilité p de S est :

$$p = \frac{1}{2}$$

   On répète $n = 10$ fois cette expérience (on fait un schéma de Bernoulli). Le nombre X de réalisation de S suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

   On a donc, pour tout $k \in [\![0, 10]\!]$:

$$P(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \times \frac{1}{2^{10}}$$

   L'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p est donnée par :

$$E(X) = np$$

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

   En moyenne, l'urne contient 5 jetons blanc (et donc 5 jetons noirs) ce qui ne devrait surprendre personne.

2. Considérons les événements suivants :

A : "l'urne contient 4 jetons blancs et 6 jetons noirs"

B : "on a tiré 4 fois un jeton blanc et 6 fois un jeton noir"

   Il s'agit de calculer : $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

   D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $\Omega = \coprod_{k=0}^{n} (X = k)$, on a :

$$P(B) = \sum_{k=0}^{10} P_{(X=k)}(B)P(X = k)$$

   Il est clair que $P_{(X=0)}(B) = 0$. (Si l'urne ne contient aucun jeton blanc, l'événement B ne peut pas se réaliser)

   Supposons que l'urne contienne k jetons blancs ($1 \leqslant k \leqslant n$) et $n - k$ jetons noirs. Notons Y le nombre de jetons blancs obtenus lors du tirage successif et avec remise de 10 jetons. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $q = \frac{k}{10}$ et $n = 10$. D'où :

$$P(Y = 4) = \binom{10}{4}\left(\frac{k}{10}\right)^4\left(\frac{10-k}{10}\right)^6$$

   D'où : $$P(B) = \frac{1}{2^{10}}\binom{10}{4}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{k}{10}\right)^4\left(\frac{10-k}{10}\right)^6\binom{10}{k} \simeq 0{,}15675 \text{ à } 10^{-5} \text{ près}$$

   Par ailleurs : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(X = 4)\binom{10}{4}0{,}4^4\,0{,}6^6 = \binom{10}{4}\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{4}0{,}4^4\,0{,}6^6$

D'où : $$P_B(A) = \frac{\binom{10}{4}0,4^4 0,6^6}{\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{k}{10}\right)^4\left(\frac{10-k}{10}\right)^6\binom{10}{k}} \simeq 0{,}328 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Il y a 32% de chance que l'urne contienne effectivement quatre jetons blancs et six jetons noirs sachant qu'on a obtenu cette même proportion de jetons lors du tirage.

Exercice 15 *Inégalité de Markov - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

1. Si toutes les valeurs x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) sont strictement inférieures à a alors : $\boxed{0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n < a}$

$$P(X \geqslant a) = 0$$

Dans ce cas l'inégalité de Markov est évidente.

Dans le cas contraire, il existe une plus petite valeur x_k de X telle que $x_k \geqslant a$.

Si $k = 1$ alors toutes les valeurs de X sont supérieures à a et on a $P(X \geqslant a) = 1$ ainsi que : $\boxed{0 \leqslant a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n}$

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i \geqslant a \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$$

$$E(X) \geqslant a$$

Dans ce cas l'inégalité de Markov est évidente.

Enfin, si $k > 1$, alors en coupant la somme en deux : $\boxed{0 \leqslant x_1 < \ldots\ a \leqslant x_k < \ldots < x_n}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = x_i)x_i + \sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)x_i$$

On peut alors minorer le deuxième terme :

$$\sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)x_i \geqslant a \sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)$$

C'est-à-dire : $$\sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)x_i \geqslant a\, P(X \geqslant a)$$

D'où : $$E(X) \geqslant a\, P(X \geqslant a)$$

Et comme $a > 0$: $$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Application : notons X la variable aléatoire correspondant à la production hebdomadaire.

D'après l'inégalité de Markov : $$P(X \geqslant 40) \leqslant \frac{1}{2}$$

Le producteur a, au plus, une chance sur deux, de doubler sa production.

2. On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $(X - E(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$:

$$P((X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{\varepsilon^2}$$

Or : $$E\left((X - E(X))^2\right) = \sigma_X^2$$

De plus, par croissance de l'application $t \mapsto \sqrt{t}$:

$$(X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2 \iff |X - E(X)| \geqslant \varepsilon$$

D'où : $$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$