Correction Exercice n° 1

1. On a $P(X>10) = 0,286 = e^{-10\lambda}$, équation qui donne $\lambda = 0,125$ au centième près.
Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,125$.

2. La probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois s'écrit $P(X\leq 0,5)$.
$P(X\leq 0,5) = 1 - e^{-0,5\times 0,125} = 1 - e^{-0,0625} \approx 0,061$

3. L'appareil a déjà fonctionné 8 années, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans est donnée par : $P_{(X>8)}(X>10)$ avec $P(X>8) = e^{-8\times 0.125}$.
$P((X>10)\cap(X>8)) = P(X>10) = e^{-10\times 0.125}$

$$P_{(X>8)}(X>10)=\frac{P((X>10)\cap(X>8)}{P(X>8)}=\frac{e^{-10\times 0.125}}{e^{-8\times 0.125}}=e^{-2\times 0.125}=P(X>2)\approx 0.779$$

4. On est en présence d'un schéma de Bernoulli. La durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable à commandé 15 oscilloscopes. La probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans est la probabilité d'un "succès" et on sait qu'elle vaut $P(X>10) = 0,286$.
L'événement "au moins un oscilloscope parmi les 15 a une durée de vie supérieure à 10 ans" est l'événement contraire de "tous les appareils ont une durée de vie inférieure à 10 ans" de probabilité $(1 - 0,286)^{15} = 0,714^{15}$.
La probabilité qu'au moins un oscilloscope parmi les 15 ait une durée de vie supérieure à 10 ans est donc $1 - 0,714^{15} \approx 0,779$.

5. On reprend la situation de la question précédente avec n oscilloscopes et on cherche n tel que $1 - 0,714^{n} \geq 0,999$ inéquation équivalente à $0,714^{n} \leq 10^{-3}$ et qui donne $n\geq\dfrac{\ln 10^{-3}}{\ln 0,714}\approx 20,5$.
L'établissement devrait acheter 21 oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Correction Exercice n° 2

La durée d'attente en secondes à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

a. FAUX. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = 0,01e^{-0,01t}$

b. VRAI. Pour tout réel t positif, $P(Y\leq t) = \int_0^t 0,01e^{-0,01x}dx=1-e^{-0,01t}$

c. FAUX. 3 minutes font 180 secondes. On cherche donc :
$P(Y\leq 180)=1-e^{-1,8}\approx 0,83$

d. VRAI. L'attente supérieure à une minute se traduit par $Y>60$.
$P(Y>60)=1-P(Y\leq 60)=e^{-0,6}\approx 0,55$. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.