La loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire continue qui suit **une loi exponentielle**

Fonction « **densité** » de cette variable aléatoire : $\begin{cases} si\ \ t<0 \quad alors \quad f(t)=0 \\ si\ \ t\geq 0 \quad alors \quad f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$ avec $\lambda>0$

- On peut facilement vérifier que cette fonction est bien « **une fonction densité** »

car on a : $\begin{cases} f(t)\geq 0 \quad \forall t\in\mathbb{R} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda\times\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \lambda\times\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \lambda\times\left(0-\frac{1}{-\lambda}\right) = 1 \end{cases}$

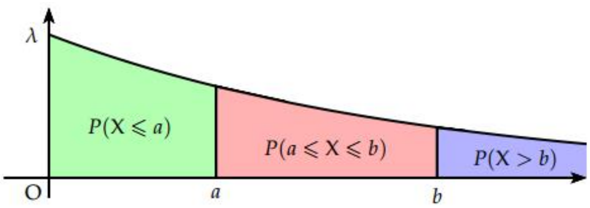
- Calcul la fonction de répartition c'est-à-dire $F(T)=P(X\leq T)$

$$F(T)=P(X\leq T)=\int_{-\infty}^{T} f(t)\,dt = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda\times\int_0^T e^{-\lambda t}dt = \lambda\times\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^T = 1-e^{-\lambda T}$$

- Soit un nombre $a>0$ **Calculons** $\boldsymbol{P(X\geq a)}$

$$P(X\geq a) = 1-P(X<a) = 1-P(X\leq a) = 1-F(a) = 1-1+e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a}$$

- Soit 2 nombres tels que $0<a<b$ **Calculons** $\boldsymbol{P(a\leq X\leq b)}$



$P(a\leq X\leq b)=P(X\leq b \text{ et } a\leq X) = \ldots\ldots$

$=\ldots\ldots = \boldsymbol{F(b)} - \boldsymbol{F(a)} = \left(1-e^{-\lambda b}\right)-\left(1-e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$

Propriété d'absence de mémoire : *(loi sans mémoire ou sans vieillissement)*
Une propriété importante sur la loi exponentielle est l'absence de mémoire
Cette propriété se traduit mathématiquement par l'équation suivante :

$\forall t>0$ et $\forall h>0$ on a $P_{X\geq t}(X\geq t+h) = P(X\geq h)$ *c'est une probabilité conditionnelle*

DEMO :

$$P_{X\geqslant t}(X\geqslant t+h) = \frac{P(X\geqslant t \text{ et } X\geqslant t+h)}{P(X\geqslant t)} = \frac{P(X\geqslant t+h)}{P(X\geqslant t)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}\times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}}$$
$$= e^{-\lambda h} = P(X\geqslant h)$$

Explication de cette formule :
Imaginons que X représente la durée de vie d'une ampoule de type « LED » avant qu'elle ne tombe en panne
La probabilité que cette ampoule dure au moins $\boldsymbol{t+h}$ heures sachant qu'elle a déjà duré $\boldsymbol{t}$ heures sera la même que la probabilité de durer $\boldsymbol{h}$ heures à partir de sa mise en fonction initiale…
En d'autres mots, le fait qu'elle ne soit pas tombée en panne pendant $\boldsymbol{t}$ heures ne change rien à au calcul de la probabilité de sa durée de vie à partir du temps $\boldsymbol{t}$

- Calcul de $E(X)$: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\times f(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty} t\times\lambda e^{-\lambda t}dt=\lambda\times\int_{0}^{+\infty} t\times e^{-\lambda t}dt=.........=\dfrac{1}{\lambda}$

  Commentaire : Le calcul de $E(X)$ nécessite de connaitre la technique qu'on appelle **IPP**
  c'est-à-dire la technique appelée en maths : **I**ntégration **P**ar **P**arties ***qui est hors-programme***
  et qui consiste à écrire que $\int_a^b u(t)\times v'(t)\,dt = \left[\,u(t)\times v(t)\,\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt$

*IMPORTANT : **2 exercices à travailler** sur cette loi (voir en page n°3 de ce document)*

Une application TRES CONNUE de cette loi :
Un domaine privilégié de la loi exponentielle est le domaine de la radioactivité
Chaque atome radioactif possède une durée de vie qui suit une loi exponentielle
Le paramètre λ s'appelle alors la constante de désintégration

ET la durée de vie moyenne de cet atome se calcule par l'espérance de la variable aléatoire c.à.d.: $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

Commentaire n° 1 :
Le fait qu'un seul atome radioactif suit une loi exponentielle de paramètre λ implique qu'une concentration d'atomes radioactifs se calcule par la formule $N(t)=N_0\,e^{-\lambda t}$ avec N_0 le nombre au départ
(ce *théorème s'appelle : « loi forte des grands nombres »*)

Commentaire n° 2 :

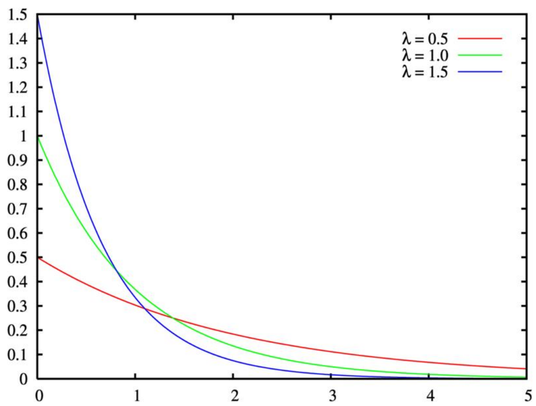
On appelle la demi-vie (ou médiane) le temps $T=\dfrac{ln(2)}{\lambda}$ qui est le temps nécessaire pour qu'une « telle population » passe à 50 % de sa population initiale
Ce nombre se calcule « facilement » à partir de l'équation $\boldsymbol{P(X\le T)=0,5}$

$$P(X\le T)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^T \lambda e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda\times\int_0^T e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda\times\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^T=\frac{1}{2}$$

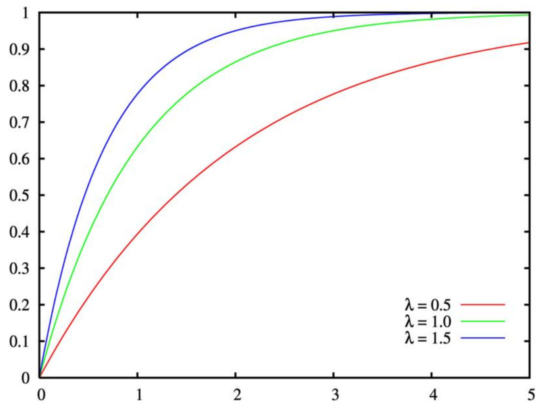
$$\Leftrightarrow 1-e^{-\lambda T}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda T}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda T=ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow T=\frac{ln\,2}{\lambda}$$

Commentaire n° 3 : Représentations graphiques d'une **« loi *exponentielle* »** avec différentes valeurs de λ

Fonction densité *si* $t\ge 0$ *alors* $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$



Fonction de répartition $F(T)=P(X\le T)=1-e^{-\lambda T}$



Ne pas oublier de travailler les 2 exercices ci-dessous........