Quelques explications supplémentaires *sur* ***Intégrale*** *et* ***Primitives*** *d'une fonction*

1) Si une fonction f est continue sur $[\,a\,,b\,]\subset\mathbb{R}$ alors cette fonction f est intégrable sur $[\,a\,,b\,]$

c'est-à-dire que le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ existe et si on connait **une primitive F de la fonction f sur [a , b]**

alors on peut calculer ce nombre en écrivant $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$

2) Si une fonction f est continue sur $[\,a\,,+\infty\,[$ et si on connait une primitive F de f sur $[\,a\,,+\infty\,[$

alors on peut calculer le nombre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ en écrivant $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{X\to+\infty} F(X)-F(a)$

3) **IDEM** pour une fonction f qui est continue sur $]\,-\infty\,,b\,]$

on a la formule $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = F(b) - \lim_{X\to-\infty} F(X)$

4) **IDEM** pour une fonction f qui est continue sur $\mathbb{R} =]\,-\infty\,,+\infty\,[$

on a la formule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{X\to+\infty} F(X) - \lim_{X\to-\infty} F(X)$

5) Si une fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ alors

La fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ **est LA PRIMITIVE de la fonction f qui s'annule en a**

c'est-à-dire $\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(a) = 0 \end{cases}$,

<u>DEMO</u> :

Il est « quasi- évident » que $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$

Pour démontrer que $F'(x) = f(x)$ *il faut démontrer que* $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$

Quelques explications supplémentaires *sur* : ***fonction de densité*** *et* ***fonction de répartition***

1) En probabilité, une variable aléatoire X réelle « *dite continue* » est caractérisée par une fonction qu'on appelle **fonction de densité** qui est une fonction f qui vérifie les 2 conditions : $\begin{cases} 1) \quad f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ 2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1 \end{cases}$

Les différents calculs qu'on peut faire sur la v.a. X sont : $\boldsymbol{P(a \leq X \leq b)}$ *ou* $\boldsymbol{P(X \leq b)}$ *ou* $\boldsymbol{P(a \leq X)}$

On appelle **fonction de répartition** de la v.a. X la fonction F définie par $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

Si on connait la fonction de répartition F de de la variable aléatoire X alors on peut calculer :

$$\begin{cases} P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^{-\infty} f(t)\, dt + \int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt = -\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt + \int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt = F(b) - F(a) \\ P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt = F(b) \\ P(a \leq X) = 1 - P(a > X) = 1 - P(a \geq X) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a) \quad car \quad P(X < x) = P(X \leq x) \end{cases}$$

2) Exemples de fonction de densité

- pour la loi exponentielle la fonction de densité est $\begin{cases} si \ t < 0 \ \ alors \ \ f(t) = 0 \\ si \ t \geq 0 \ \ alors \ \ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}$ avec $\lambda > 0$
- pour la loi uniforme sur [a , b] la fonction de densité est $\begin{cases} si \ t < a \ \ alors \ \ f(t) = 0 \\ si \ a \leq t \leq b \ \ alors \ \ f(t) = \dfrac{1}{b-a} \\ si \ t > b \ \ alors \ \ f(t) = 0 \end{cases}$
- pour la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ la fonction de densité est $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$

3) Exemples de fonction de répartition

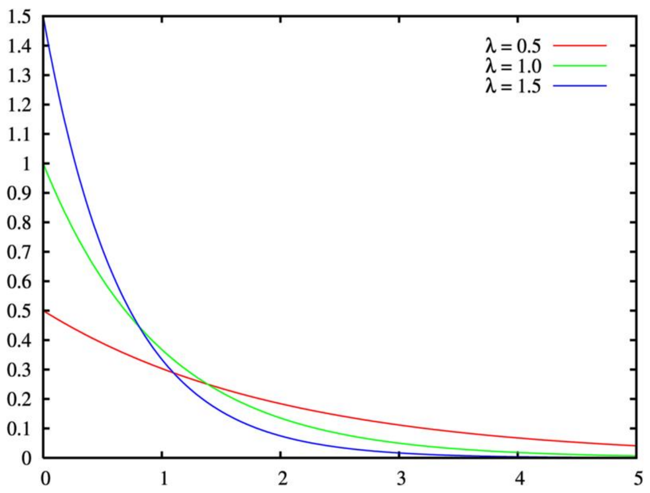
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur **[a , b]** : la fonction de répartition F est définie par

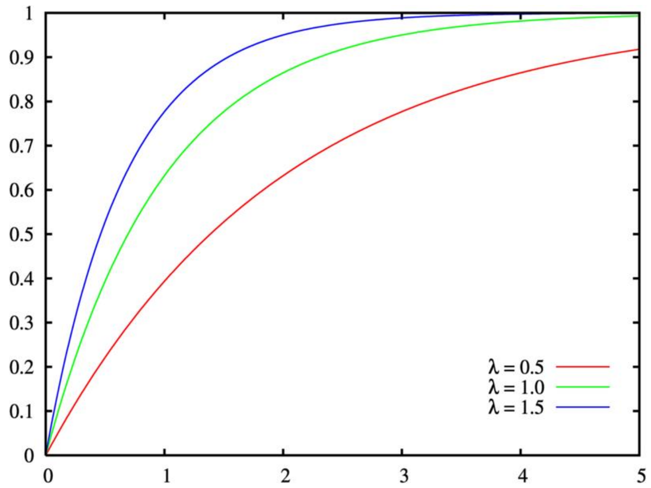
$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_a^x \dfrac{1}{b-a}\, dt = \dfrac{1}{b-a}\int_a^x dt = \dfrac{1}{b-a}\big[t\big]_a^x = \dfrac{x-a}{b-a} \\ \forall x < a \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0 \\ \forall x > b \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_a^b \dfrac{1}{b-a}\, dt = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b dt = \dfrac{1}{b-a}\big[t\big]_a^b = \dfrac{b-a}{b-a} = 1 \end{cases}$$

Soit X une v. a. qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: la fonction de répartition F est définie par

$$\begin{cases} \forall x \leq 0 \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 \\ \forall x > 0 \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \times \int_{0}^{x} e^{-\lambda t} dt = \lambda \times \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$$

Représentations graphiques d'une **« loi *exponentielle* »** avec différentes valeurs de $\lambda > 0$





Fonction densité *si* $t \geq 0$ *alors* $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

Fonction répartition $F(T) = P(X \leq T) = 1 - e^{-\lambda T}$

4) Calcul de l'espérance ***E(X)*** et de la variance ***V(X)*** *d'une v.a.* ***X*** *(si ces 2 nombres existent….)*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\,dt$$ *Ce calcul nécessite souvent de faire **Intégration Par Parties*** ***(IPP** : hors programme)*

$$V(X) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \times f(t)\,dt \right) - \left[E(X) \right]^2$$ *Ce calcul nécessite souvent de faire **2** IPP (hors programme)*

5) Calcul de $E(X)$ et $V(X)$ pour une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur [a , b]

5.1) Calcul de $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\,dt = \int_{a}^{b} t \times f(t)\,dt$ *car* $\forall t \notin [a, b]$ *on a* $f(t) = 0$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \times f(t)\,dt = \int_{a}^{b} t \times \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} t\,dt = \frac{1}{b-a} \times \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

5.2) Calcul de $V(X)=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\times f(t)\,dt\right)-\left[E(X)\right]^2$ *afin de calculer l'écart type :* $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$

1) Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\times f(t)\,dt=\int_a^b t^2\times\frac{1}{b-a}\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b t^2\,dt=\frac{1}{b-a}\times\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b$

$$=\frac{1}{b-a}\times\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

2) Calcul de $V(X)=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\times f(t)\,dt\right)-\left[E(X)\right]^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{4b^2+4ab+4a^2}{12}-\frac{3a^2+6ab+3b^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

6) Calcul de $E(X)$ **et** $V(X)$ **pour une variable aléatoire** X **qui suit la loi exponentielle de paramètre** $\lambda>0$

Calcul de $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\times f(t)\,dt=\int_0^{+\infty} t\times f(t)\,dt$ *car* $\forall t<0$ *on a* $f(t)=0$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t\times f(t)\,dt=\int_0^{+\infty} t\times\lambda e^{-\lambda t}dt=\lambda\times\int_0^{+\infty} t\times e^{-\lambda t}dt=\textbf{(1)}=\lambda\times\left(\left[t\times\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}1\times\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\,dt\right)$$

$$=\lambda\times\left(0-0-\int_0^{+\infty}1\times\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\,dt\right)=\lambda\times\left(-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\,dt\right)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\,dt=\textbf{(2)}=\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty}=\left(0-\frac{1}{-\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}$$

(1) *Ce calcul nécessite de faire une intégration par parties* ***(notion qui est hors programme)***

c'est-à-dire : $\int_a^b u(t)\times v'(t)\,dt=\left[u(t)\times v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt$

(2) *Pour calculer* $\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\,dt$ *il est nécessaire de calculer* $\int_0^X e^{-\lambda t}\,dt$ *puis* $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-\lambda t}\,dt$

c'est-à-dire $\int_0^X e^{-\lambda t}\,dt=\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^X=\frac{e^{-\lambda X}}{-\lambda}-\frac{e^{-\lambda\times 0}}{-\lambda}=\frac{e^{-\lambda X}}{-\lambda}-\frac{1}{-\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda X}\right)$

puis le calcul de cette expression quand X *tend vers* $+\infty$ *c'est-à-dire* $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda X}\right)=\frac{1}{\lambda}$ *car* $\lambda>0$

<u>Remarque</u> : Calcul de $V(X)=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\times f(t)\,dt\right)-\left[E(X)\right]^2=\left(\int_0^{+\infty} t^2\times\lambda e^{-\lambda t}\,dt\right)-\left[\frac{1}{\lambda}\right]^2=\ldots\ldots=\frac{1}{\lambda^2}$ **(*)**

(*) *Ce calcul nécessite de faire 2 intégrations par parties* ***(notion qui est hors programme)***