Epreuve de Bernoulli , Schéma de Bernoulli et la LOI BINOMIALE

1) Epreuve de Bernoulli

Définition : On appelle *épreuve de Bernoulli* toute épreuve ne possédant que deux issues possibles, que l'on appelle *succès* et *échec*.

Si X désigne une variable aléatoire réelle comptant le nombre de succès dans une épreuve de Bernoulli, alors nous avons les deux cas suivants :

- $(X = 1)$ est l'événement correspondant au succès : on lui donne la probabilité p ($p \in [0, 1]$)
- $(X = 0)$ est donc l'événement correspondant à l'échec. Il a pour probabilité $q = 1 - p$.

Si une variable aléatoire réelle X suit une loi de Bernoulli, alors on note $\mathbf{L}(X) = \mathbf{B}(p)$ sa loi de probabilité, où p désigne la probabilité du succès.

Théorème : L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une épreuve de Bernoulli sont données par

$$\boldsymbol{E(X) = p} \qquad \textbf{et} \qquad \boldsymbol{\mathrm{Var}(X) = p(1-p) = pq}$$

Démonstration *: Tableau de la loi d'une variable aléatoire qui suit une épreuve de Bernoulli de paramètre p :*

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Formules donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire

$$E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i) \quad \textit{et}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E\left(X - E(X)\right)^2 \quad \textit{et}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

Ici, nous avons donc

1. $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$
2. $\mathrm{Var}(X) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = (1-p)[p(1-p) + p^2] = p(1-p)$ *(1ère formule)*
3. $\mathrm{Var}(X) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$ *(2ème formule)*

A retenir :

On appelle schéma de Bernoulli de paramètres ***n*** et ***p*** toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois <u>de façon indépendante</u> une épreuve de Bernoulli de paramètre ***p***

Pour schématiser la succession de plusieurs expériences de Bernoulli indépendantes, on peut construire un arbre de probabilité comportant *« **2*n*** rameaux finaux »*
Cet arbre s'appelle un schéma de Bernoulli

2) La loi Binomiale $B(n, p)$

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves, de paramètre p. Soit S_n la variable aléatoire associée **au nombre de succès** au bout de n épreuves de Bernoulli, donc définie de la manière suivante :

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_{n-1} + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Définition : On dit que la variable aléatoire S_n suit la *loi binomiale* de paramètres n et p

On note cette loi $B(n, p)$ et pour tout $k \in \{0, . . . , n\}$, la loi de probabilité est :

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Théorème : L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètres n et p sont données par

$$E(S_n) = n\,p \qquad \text{et} \qquad Var(S_n) = n\,p(1-p) = n\,p\,q$$

Démonstration *: Formules donnant l'espérance et la variance de la variable aléatoire* S_n

$E(S_n) = E(\sum X_i)$ = **(*)** = $\sum E(X_i) = \sum p = np$

(*) voir les règles ci-dessous

$Var(S_n) = Var(\sum X_i)$ = **(*)** = $\sum Var(X_i) = \sum pq = npq$

(*) voir les règles ci-dessous : règle qui peut être appliquée car les 2 v.a. sont <u>indépendantes</u>

<u>Règles IMPORTANT ES à comprendre et à retenir</u> :

Soit X et Y **2** variables aléatoires réelles données

(2 v.a. réelles *définies sur le même univers et admettant une espérance et une variance)*

On a :

- $E(Y+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX+b) = a\,E(X) + b$ *avec* **a** *et* **b** *deux réels donnés quelconque*
- Attention ! $Var(Y+Y) \neq Var(X) + Var(Y)$
- $Var(aX+b) = a^2\,Var(X)$ *avec* **a** *et* **b** *deux réels donnés quelconque*
- Si X et Y sont 2 v.a. <u>indépendantes</u> alors
  $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$ et $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$