La LOI BINOMIALE et convergence vers une LOI NORMALE et vers une LOI de POISSON

1) Loi Binomiale $\Leftrightarrow$ schéma de Bernoulli de n épreuves *(succession de n épreuves de Bernoulli)*

Soit un schéma de Bernoulli à *n* épreuves, de paramètre *p*. Soit ***S_n*** la variable aléatoire associée **au nombre de succès** au bout de *n* épreuves de Bernoulli, donc définie de la manière suivante :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Définition : On dit que la variable aléatoire S_n suit la *loi binomiale* de paramètres *n* et *p*

On note cette loi B(*n*, *p*) et pour tout *k* $\in \{0, \dots, n\}$, la loi de probabilité est :

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Théorème : L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi Binomiale de paramètres n et p sont données par

$$E(S_n) = np \qquad \text{et} \qquad Var(S_n) = np(1-p) = npq$$

Remarque n° 1 :

La variable aléatoire définie par $X_n = \dfrac{S_n - E(S_n)}{Var(S_n)}$ ***est une V. A. centrée réduite***

c'est-à-dire : $\begin{cases} E(X_n) = 0 \\ Var(X_n) = 1 \end{cases}$

Remarque n° 2 :

Lorsque l'on trace les histogrammes de la variable centrée réduite pour différentes lois binomiales, on constate que les graphes obtenus présentent **une allure de "courbe en cloche"** surtout lorsque **le produit** $Var(S_n) = n\,p\,(1-p) = n\,p\,q$ **est « grand »** et/ou que **p est proche de 0,5**

Voir l'annexe n° 1

3) Convergence de la loi BINOMIALE quand $n \to +\infty$

Rappel : On note $N(0,1)$ la loi Normale centrée réduite et voici un rappel du théorème « CENTRAL LIMIT »

Théorème 7 (théorème central limit) : Soit S_n la variable aléatoire résultat de la somme de $n \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires indépendantes de même loi, chacune d'espérance μ et de variance σ^2, et Z_n la variable aléatoire définie par

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Alors on a $\mathscr{L}(Z_n) = \mathscr{N}(0,1)$.

Appliquons ce théorème à la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_{n-1} + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

où X_i sont **n épreuves de Bernoulli** indépendantes de paramètre p ($p = \mu = E(X_i)$ *et*

$\sigma = \sqrt{Var(X_i)} = \sqrt{pq}$

ON A DONC

Convergence de la loi Binomiale $B(n,p)$ vers la loi Normale centrée réduite $N(0,1)$ quand $n \to +\infty$

donc la loi de $Z_n = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{pq} \times \sqrt{n}} \to N(0,1)$ quand $n \to +\infty$

Théorème 8 : Soit X une variable aléatoire telle que $\mathscr{L}(X) = \mathscr{B}(n,p)$. Alors, pour tout entier k, on a

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \text{ quand } n \to +\infty,$$

avec $\mu = E(X) = np$ et $\sigma^2 = V(X) = np(1-p)$. Cette convergence est d'autant plus rapide que p est proche de 0,5.

4) Convergence de la loi Binomiale $B(n,p)$ vers la loi de Poisson

La loi Binomiale $B(n,p)$ quand $n \to +\infty$ et $np \to \lambda$ tend vers la loi de Poisson de paramètre λ

c'est-à-dire $\mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{k}) = \dfrac{\lambda}{\mathbf{k}!}\mathbf{exp}(-\lambda)$

<u>Preuve</u> : Pour k *fixé, calculons la limite de l'expression* $P(X = k)$ *quand* $n \to +\infty$ ***et*** $np \to \lambda$

On a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$ *que l'on peut écrire sous la forme*

$P(X = k) = \dfrac{1}{k!} \times \dfrac{(n)(n-1)...(n)(n-k+1)}{(n)(n)...(n)} (np)^k \left(1 - \dfrac{np}{n}\right)^{n-k}$ *puis en calculant les limites comme*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} = \dfrac{(n)(n-1)...(n)(n-k+1)}{(n)(n)...(n)} = 1 \\ \lim\limits_{np \to \lambda} = (np)^k = \lambda^k \\ \lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ np \to \lambda}} = \left(1 - \dfrac{np}{n}\right)^{n-k} = \exp(-\lambda) \end{cases}$$

on obtient que : $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ np \to \lambda}} P(X=k) = \dfrac{1}{k!} \times (\lambda)^k \exp(-\lambda)$

Annexe 1 *(et lire le conseil n° 1 en page 4)*

Interprétation des 3 représentations graphiques ci-dessous :

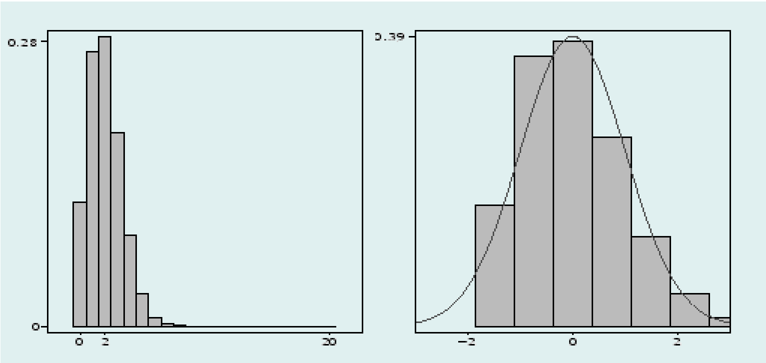
L'allure de **"*courbe en cloche*"** pour une loi Binomiale **B (n , p)** est **« *de plus en plus évidente* »**

1. Quand $Var(S_n) = n\,p\,(1-p) = n\;p\;q$ **est assez grand**

2. et /ou également quand le paramètre **p est proche de 0,5**

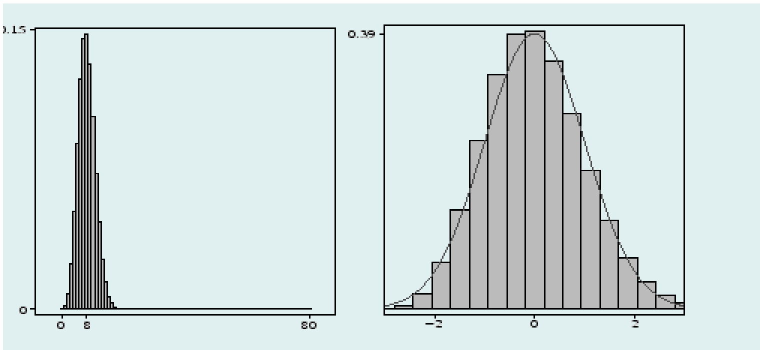
- Histogramme quand $p = 0{,}1$ et $n = 20$ *c'est*-à-dire $\mathrm{P}(\mathrm{X_n} = \mathrm{k}) = \binom{20}{\mathrm{k}}(0{,}1)^{\mathrm{k}}(0{,}9)^{20-\mathrm{k}}$

Loi binomiale B (20 , 0.1) Histogramme de la loi centrée réduite



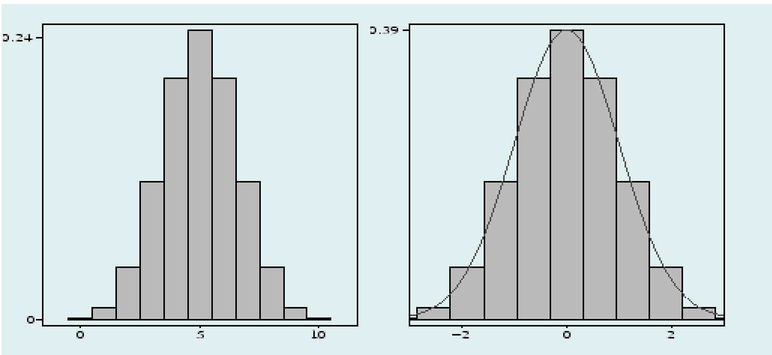
- Histogramme quand $p = 0{,}1$ et $n = 80$ c'est-à-dire $\mathrm{P}(\mathrm{X_n} = \mathrm{k}) = \binom{80}{\mathrm{k}}(0{,}1)^{\mathrm{k}}(0{,}9)^{80-\mathrm{k}}$

Loi binomiale B (80 , 0.1) Histogramme de la loi centrée réduite



- Histogramme quand $p = 0{,}5$ et $n = 10$ c'est-à-dire $\mathrm{P}(\mathrm{X_n} = \mathrm{k}) = \binom{10}{\mathrm{k}}(0{,}5)^{\mathrm{k}}(0{,}5)^{10-\mathrm{k}}$

Loi binomiale B (10 , 0.5) Histogramme de la loi centrée réduite



2 Conseils

I)

Pour comprendre le passage d'une loi discrète à une loi continue (à densité) :

Travailler le TP intitulé ***« Du discret au continu : Loi binomiale et loi normale »*** qui est accessible depuis ce site…..

II)

Exercice pour vérifier des calculs

Soit une V.A. K qui suit une loi de POISSON de paramètre λ

c'est-à-dire $P(K=k)=\frac{1}{k\,!}\times(\lambda)^k \exp(-\lambda)$

Vérifier par des calculs que pour tout k

1) $0 \le P(K=k) \le 1$

2) $\sum P(K=k)=1$

Et vérifier également que

3) $E(K)=\lambda$

4) $\mathrm{Var}(K)=\lambda$