la LOI de NORMALE et la LOI DE POISSON

1) la LOI NORMALE

Définition 2 : On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une *loi normale* d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$ (donc de variance σ^2) si elle admet pour densité de probabilité la fonction $f(x)$ définie pour tout réel x par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

On note $\mathscr{L}(X) = \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$.

Calcul de l'espérance et de la variance : $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$

***démonstration (espérance, variance)** : Nous allons montrer que l'espérance d'une variable qui suit une loi normale est égale à μ et que sa variance est égale à σ^2. Par définition, l'espérance égale à*

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}x.$$

Pour calculer cette intégrale, faisons le changement de variables $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ (impliquant $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sigma}$), classique pour les calculs sur la loi normale. Il vient :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma u) \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] \mathrm{d}u \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] \mathrm{d}u + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

La seconde intégrale est nulle (en effet, il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire). Quant à la première, elle est égale à $\sqrt{2\pi}$, ce qui se montre en posant $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] \mathrm{d}u$ et donc $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et en intégrant en coordonnées polaires. On trouve alors finalement que $E(X) = \mu$.

De la même façon :

$$E\left((X-\mu)^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

deviendra, après changement de variables ci-dessus :

$$E\left((X-\mu)^2\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] \mathrm{d}u.$$

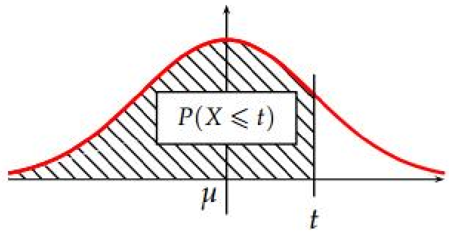
En intégrant par parties, on trouve directement que

$$E\left((X-\mu)^2\right) = \sigma^2.$$

Représentation graphique et proriété de la LOI NORMALE

Représentation graphique de la fonction de répartition de la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$:

$$F_X(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$



Proposition 1 : La variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Proposition 3 : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors la variable aléatoire $\mathcal{L}(X+Y) = \mathcal{N}\left(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$.

2) la LOI de POISSON

Cette loi a été découverte au début du XIX[e] siècle par Siméon-Denis Poisson. Elle s'applique généralement aux phénomènes accidentels où la probabilité p est très faible, ou aux phénomènes sans mémoire (pannes de machines, accidents d'avions, fautes dans un texte, etc.). Dans certaines conditions, elle peut également être définie comme limite d'une loi binomiale (notamment lorsque $n \geqslant 50$ et $np \leqslant 5$:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ et $p \in [0,1]$. Les calculs avec une loi binomiale deviennent rapidement compliqués dès que n est très grand et p très petit. On cherche alors à approximer $P(X=k)$ par quelque chose de plus simple. La question est alors : en posant $\lambda = np$ (constante), est-ce que la quantité $P(X=k) = \binom{n}{k}\, p^k\,(1-p)^{n-k}$ a-t-elle une limite lorsque $n \to \infty$?

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\, p^k\,(1-p)^{n-k} &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \exp\left((n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right) \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{n^k}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\exp\left(-\frac{(n-k)\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= 1\Bigg(\underbrace{1-\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}\Bigg)\Bigg(\underbrace{1-\frac{2}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}\Bigg)\cdots\Bigg(\underbrace{1-\frac{k-1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1}\Bigg)\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\exp\Bigg(\underbrace{-\frac{(n-k)\lambda}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}-\lambda} + o\left(\frac{1}{n}\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\, p^k\,(1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Définition 1 : On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une *loi de Poisson* de paramètre $\lambda > 0$ si sa loi de probabilité est donnée par :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \qquad P(X=i) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^i}{i!}.$$

(confère annexe n° 3 en fin de ce document)

Calcul de l'espérance et de la variance

Théorème 1 : Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors :

$$E(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

démonstration : Rappelons que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(\flat)$ et $\forall\, i \in \mathbb{N}, P(X=i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=0}^{+\infty} i\,P(X=i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} - \lambda^2 \\
&\overset{i^2=i+i(i-1)}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} i\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} + \sum_{i=1}^{+\infty} i(i-1)\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} - \lambda^2 \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{(i-2)!} - \lambda^2 \\
&= \lambda\sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} + \lambda^2\sum_{i=2}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} - \lambda^2 \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} - \lambda^2 \\
&\overset{(\flat)}{=} \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} - \lambda^2 \\
&= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 \quad = \quad \lambda.
\end{aligned}$$

Ces égalités sont donc démontrées. ∎

4) Le théorème « central limit » (convergence quand $n \to +\infty$)

4.1) Le théorème « central limit »

Théorème 2 (théorème central limit) : Soit S_n la variable aléatoire résultat de la somme de $n \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires indépendantes de même loi, chacune d'espérance μ et de variance σ^2, et Z_n la variable aléatoire définie par

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Alors on a $\mathscr{L}(Z_n) = \mathscr{N}(0,1)$.

4.2) Exemple très connu : CONVERGENCE d'une LOI BINOMIALE quand $n \to +\infty$ vers la loi NORMALE

Théorème 8 : Soit X une variable aléatoire telle que $\mathscr{L}(X) = \mathscr{B}(n,p)$. Alors, pour tout entier k, on a

$$P(X=k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

avec $\mu = E(X) = np$ et $\sigma^2 = V(X) = np(1-p)$. Cette convergence est d'autant plus rapide que p est proche de 0,5.

(*approximation valable dès que* ***n*** **> 30** *et* ***np*** > 5 *et* ***n(1 − p)*** **> 5**)

ANNEXE 1 *courbe de Gauss* ou *courbe en cloche*

Soir une v .a. X qui suit une loi Normale
de moyenne μ et variance σ^2

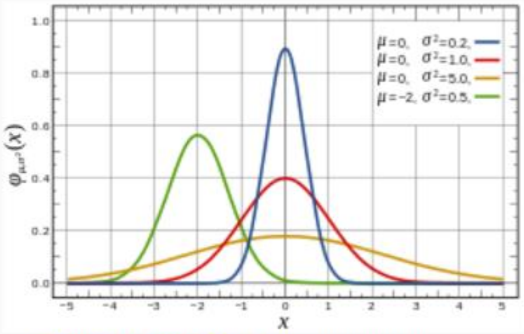
La v.a. $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi Normale centrée réduite
c'est-à-dire $E(Y)=0$ et $Var(Y)=1$

La fonction « densité » de la loi Normale
de moyenne μ et d'écart type σ
est définie par la fonction f telle que

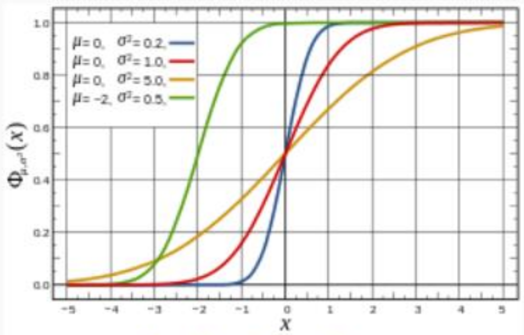
$$f(x) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

La représentation graphique de la fonction f est appelée

« courbe de Gauss ou ***courbe en cloche »***



Densité de probabilité (ou fonction de masse)
La courbe rouge représente la fonction φ,
densité de probabilité de la loi normale centrée réduite.



Fonction de répartition
La courbe rouge représente la fonction Φ,
fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

ANNEXE 2
CONVERGENCE d'une loi de POISSON quand $\lambda \to +\infty$ vers la loi NORMALE

Si **X** tel que $P(X=k) = \dfrac{\lambda}{k!}\exp(-\lambda)$ avec $\sum P(X=k)=1$ et $E(X)=\lambda$ et $Var(X)=\lambda$

QUAND $\lambda \to +\infty$ ALORS

$$\mathbf{P(X=k) = \frac{\lambda}{k!}\exp(-\lambda)} \quad \to \quad \mathbf{P(X=k) = \frac{\lambda}{\lambda\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\lambda}{\lambda}\right)^2\right)}$$

(approximation valable dès que λ > 20)

ANNEXE 3
CONVERGENCE d'une loi BINOMIALE quand $n \to +\infty$ et $np \to \lambda$ vers la loi de POISSON

Si **X** tel que $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

QUAND $n \to +\infty$ et $np \to \lambda$ ALORS

$$\mathbf{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \quad \to \quad \mathbf{P(X=k) = \frac{\lambda}{k!}\exp(-\lambda)}$$