

EXERCICE 5 (5 points)*Commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée sur le document *annexe* que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathcal{C}$

1) On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1; +\infty[$.

2) Pour tout x de l'intervalle $]-1; +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f .

3) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$.

Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1) Démontrer que si $x \in [0; 4]$, alors $f(x) \in [0; 4]$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Sur le graphique de l'*annexe*, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0; 4]$.

c) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .

d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

e) Utiliser la **partie A** pour donner la valeur de ℓ .

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie

EXERCICE 5

