Correction de cet exercice

EXERCICE 1

1) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{3}.}$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel n

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Or $v_0 = u_0 - 6 = -5$ et donc pour tout entier naturel n on a

$$u_n = v_n + 6 = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6.}$$

c) Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. On en déduit que la suite (u_n) converge et que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 6.}$$

2) a) $10w_{10} = 11w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$ et donc $w_{10} = \frac{210}{10} = 21$.

$$\boxed{w_{10} = 21.}$$

b) Il semblerait que pour tout entier naturel n, on ait $w_n = 2n + 1$. Prouvons-le par récurrence.

- Pour $n = 0$, on a $2 \times 0 + 1 = 1 = w_0$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $w_{n-1} = 2(n-1) + 1$ ou encore $w_{n-1} = 2n - 1$.

$$w_n = \frac{(n+1)w_{n-1} + 1}{n} = \frac{(n+1)(2n-1) + 1}{n} = \frac{2n^2 + n}{n} = 2n + 1.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, on ait $w_n = 2n + 1$. En particulier

$$\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison 2 et } w_{2009} = 4019.}$$

Si on n'aime pas passer de $n-1$ à n et que l'on préfère passer de n à $n+1$, on doit commencer par se réécrire la relation de récurrence : pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 1$. La démonstration principale s'écrit alors

$$w_{n+1} = \frac{(n+2)w_n + 1}{n+1} = \frac{(n+2)(2n+1) + 1}{n+1} = \frac{2n^2 + 5n + 3}{n+1} = \frac{(n+1)(2n+3)}{n+1} = 2n + 3 = 2(n+1) + 1.$$