EXERCICE 4 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.

a. Etudier les variations de f sur $[0; 20]$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.

c. On donne ci-dessous la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthogonal. Représenter à l'aide de ce graphique les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sur l'axe des abscisses.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \ : \ z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Etudier les variations de g sur $[0;+\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interprétez le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?