Correction de cet exercice

EXERCICE 4

Partie A : un modèle discret

1) a. Pour tout réel x de $[0;20]$, $f(x) = \frac{1}{10}(20x - x^2)$. f est dérivable sur $[0;20]$ et pour tout réel x de $[0;20]$,
$f'(x) = \frac{1}{10}(20 - 2x) = \frac{1}{5}(10 - x)$. On en déduit le :

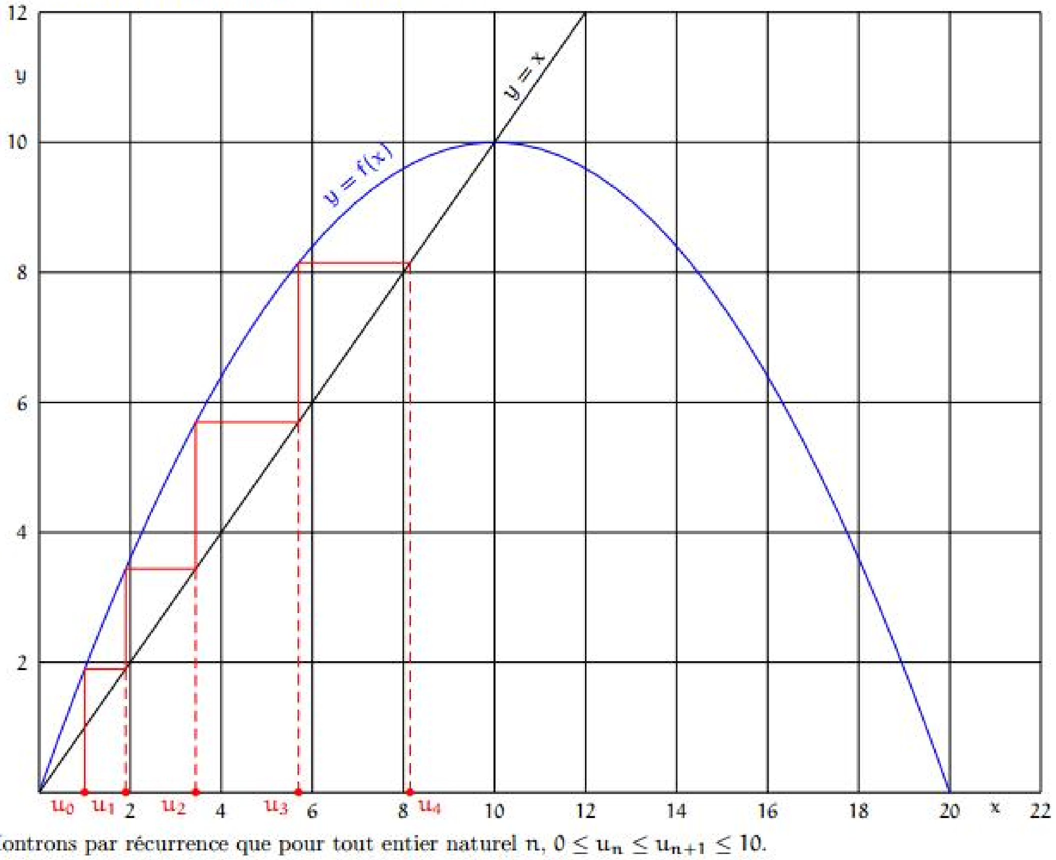
Tableau de variations de f.

x	0		10		20
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	10	↘	0

b. f admet donc un minimum égal à 0 atteint en $x = 0$ et $x = 20$ et un maximum égal à 10 atteint en $x = 10$. Donc,

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0;20],\ f(x) \in [0;10].}$$

c. Représentation graphique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

- On a $u_0 = 1$ puis $u_1 = f(u_0) = \frac{19}{10} = 1,9$ et donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$. Puisque f est croissante sur $[0;10]$, on a $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$ ce qui s'écrit encore $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10.}$$

3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 10. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on note ℓ. De plus, comme pour tout entier n, on a $1 \leq u_n \leq 10$ (car $u_0 = 1$ et car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante), quand n tend vers $+\infty$, on obtient $1 \leq \ell \leq 10$. Ensuite, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \dfrac{1}{10}u_n(20 - u_n)$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = \dfrac{1}{10}\ell(20-\ell)$ puis $10\ell = \ell(20-\ell)$ puis $10 = 20 - \ell$ (car $\ell \neq 0$) et enfin $\ell = 10$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to\infty} u_n = 10.}$$

Partie B : un modèle continu

1) a. Soit y une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ ne s'annulant pas sur $[0, +\infty[$. Posons alors $z = \dfrac{1}{y}$.

z est définie, dérivable sur $[0; +\infty[$, ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et de plus $y = \dfrac{1}{z}$ et donc $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$. Mais alors,

$$y' = \frac{1}{20}y(10-y) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{20}y^2 \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{20}\frac{1}{z^2} \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Soient a et b deux réels. On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$. Ici, $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{1}{20}$. Donc

$$\boxed{\text{les solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto Ce^{-x/2} + \frac{1}{10},\ C \in \mathbb{R}.}$$

Si une telle fonction ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$, elle fournit une solution de (E) sur $[0; +\infty[$ à savoir la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{Ce^{-x/2} + \dfrac{1}{10}}$.

2) D'après ce qui précède, il existe une contante réelle C telle que pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \dfrac{10}{10Ce^{-x/2} + 1}$. L'égalité $g(0) = 1$ fournit $\dfrac{1}{C + \dfrac{1}{10}} = 1$ puis $C + \dfrac{1}{10} = 1$ et donc $C = \dfrac{9}{10}$. Donc, pour tout réel $x \geq 0$,

$$g(x) = \frac{1}{\dfrac{9}{10}e^{-x/2} + \dfrac{1}{10}} = \frac{10}{9e^{-x/2} + 1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ g(x) = \frac{10}{9e^{-x/2} + 1}.}$$

3) La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et pour $x \geq 0$

$$g'(x) = 10 \times \frac{-(9e^{-x/2} + 1)'}{(9e^{-x/2} + 1)^2} = 10 \times \frac{-9 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times e^{-x/2}}{(9e^{-x/2} + 1)^2} = \frac{4{,}5e^{-x/2}}{(9e^{-x/2} + 1)^2}.$$

g' est strictement positive sur $[0; +\infty[$ et donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[.}$$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x/2} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{10}{0+1} = 10$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 10.}$$

5) Soit x un entier naturel.

$$
\begin{aligned}
g(x) \geq 5 &\Leftrightarrow \frac{10}{9e^{-x/2}+1} \geq 5 \\
&\Leftrightarrow \frac{9e^{-x/2}+1}{10} \leq \frac{1}{5} \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et car } 9e^{-x/2}+1>0) \\
&\Leftrightarrow 9e^{-x/2}+1 \leq 2 \Leftrightarrow 9e^{-x/2} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x/2} \leq \frac{1}{9} \\
&\Leftrightarrow \ln(e^{-x/2}) \leq \ln\frac{1}{9} \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0;+\infty[) \\
&\Leftrightarrow -\frac{x}{2} \leq -\ln 9 \Leftrightarrow x \geq 2\ln 9 \\
&\Leftrightarrow x \geq 4,3\ldots \Leftrightarrow x \geq 5 \text{ (car x est entier).}
\end{aligned}
$$

$x = 5$ correspond à l'année 2010 et donc

$\boxed{\text{Le nombre de foyers possédant un téléviseur à fond plat dépassera 5 millions à partir de l'année 2010.}}$