CORRECTION de l'exercice n°3

Exercice n°3 : *Etude d'une suite récurrente*

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

1. Étudier les variations de f.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

   c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

   d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$|u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$$

   En déduire la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

1. $f = h \circ g$ où $g : x \in [-1, +\infty[\longmapsto \dfrac{1+x}{2}$ et $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \sqrt{x}$.

   Comme g est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et h est strictement croissante sur $g([-1, +\infty[) = \mathbb{R}_+$, on en déduit, par composition, que f est croissante sur $[-1, +\infty[$.

2. a. On considère la propriété $\wp$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

   $$0 < u_n < u_{n+1} < 1$$

   - Comme $u_1 = \sqrt{\dfrac{1+u_0}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on a bien :

     $$0 < u_0 < u_1 < 1$$

     D'où $\wp(0)$. La propriété $\wp$ est initialisée au rang 0.

   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\quad 0 < u_n < u_{n+1} < 1$

     Comme f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ (puisqu'elle l'est sur $[-1, +\infty[$), on a :

     $$f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$$

     C'est-à-dire : $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$

     D'où : $\quad 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$

     Ce qui est $\wp(n+1)$.

     La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 0.

   Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit : $\wp(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   C'est-à-dire : $\quad 0 < u_n < u_{n+1} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   b. On vient de voir que la suite (u_n) est croissante et majorée (par 1), donc elle converge.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - 1 = \frac{\frac{1+u_n}{2} - 1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1} = \frac{\frac{u_n - 1}{2}}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1} = \frac{1}{2}\,\frac{u_n - 1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1}$$

Or $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \geqslant 0$, d'où $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1 \geqslant 1$ et par passage à l'inverse : $\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1} \leqslant 1$

D'où :
$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

d. Soit P la propriété définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$|u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$$

On a $P(0)$.

Si $P(n)$ alors :

$$|u_{n+1} - 1| \overset{2.c.}{\leqslant} \frac{1}{2}|u_n - 1| \overset{P(n)}{\leqslant} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$$

D'où :
$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - 1|$$

Ce qui est $P(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$, c'est-à-dire :

$$|u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1 ; 1[$), nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - 1| = 0$$

D'où :
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$