Exercice 1 *Quelques résultats théoriques*

Démontrer que :

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
3. Si une suite converge, alors sa limite est unique.
4. La suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite.
5. Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0 alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.
6. Toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire et a pour limite un entier relatif.
7. Toute suite divergente vers $+\infty$ est minorée.

Exercice 2 *Comportement asymptotique des suites géométriques*

1. Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

pour tout réel x positif et tout entier naturel n, on a : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

2. Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

- Si $a \in]1\,;+\infty[$ alors (u_n) est divergente (vers $+\infty$)
- Si $a = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1)
- Si $a \in]-1\,;1[$ alors (u_n) est convergente vers 0
- Si $a \in]-\infty\,;-1]$ alors (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 3 *Étude d'une suite récurrente*

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

1. Étudier les variations de f.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 *Séries de Riemann*

On appelle "série" toute suite définie par une somme.

Les séries de Riemann sont les suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Nous allons étudier le comportement de ces séries pour certaines valeurs entières de α.

0. Démontrer que la suite (u_n) est croissante. (Quelle que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{N}$)
1. Dans cette question, $\alpha = 1$. On a donc :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

   (Cette série porte encore le nom d"harmonique")

   a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n} \geqslant \frac{1}{2} + u_n$$

   b. En déduire que (u_n) diverge.

2. Dans cette question, on suppose $\alpha = 2$. On a donc :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

   a. Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

   b. En déduire que (u_n) est majorée par 2.

   Pour $\alpha = 2$, la suite (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

3. Dans cette question, on suppose $\alpha \geqslant 3$.

   Démontrer que (u_n) converge.

Exercice 5 *Suites de Héron*

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)}{2x^2}$$

   En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = E\left(\sqrt{a}\right)+1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n \leqslant u_0$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{a}\right)$$

c) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_n - \sqrt{a} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{a}\right)$$

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

<u>Exercice 6</u> *Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2*

Considérons la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\qquad u_n = 2^n$

<u>Exercice 7</u> *Moyenne arithmético-géométrique*

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$a_0 = a \ ; \ b_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Démontrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

<u>Exercice 8</u> *Divergence des suites (cos n) et (sin n)*

Démontrer que les suites $(\sin n)$ et $(\cos n)$ divergent.

<u>Exercice 9</u> *Étude d'une suite définie de façon implicite*

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction polynôme P_n, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$$

1. Étudier, pour tout $n \geqslant 2$, le sens de variation de P_n sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $P_n(0)$ et $P_n(1)$.

   En déduire que, pour $n \geqslant 2$, P_n admet une unique racine α_n dans $]0, 1[$. (On donnera la valeur exacte de α_2)

2. Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$: $\qquad P_n(\alpha_{n+1}) < 0$

En déduire le sens de variation de la suite (α_n). La suite (α_n) converge-t-elle ?

3. a. Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a :

$$P_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 2$: $\alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n + 1 = 0$

b. Justifier, pour tout $n \geqslant 2$, les inégalités suivantes :

$$\alpha_n < \alpha_2 < 1$$

$$0 < 2\alpha_n - 1 < \alpha_2^{n+1}$$

c. En déduire la valeur de la limite de la suite (α_n).

Exercice 10 *Étude d'une suite arithmético-géométrique. Passage à l'euro*

1. Chaque année, la grand-mère de Julien a déposé de l'argent dans une tirelire afin de constituer une cagnotte pour son petit-fils.

   Elle a commencé le 1er janvier 1982 par un dépôt de 500 F. Depuis lors, elle a effectué un dépôt chaque 1er janvier, en augmentant chaque année le montant de ce dépôt de 50 F.

   On note :

   - u_n le montant, exprimé en francs, de la somme déposée dans la tirelire le 1er janvier de l'année 1982 + n. (Ainsi, $u_0 = 500$, $u_1 = 550$, ...)
   - s_n le montant, en francs, de la somme contenue dans la tirelire après le dépôt de l'année 1982 + n. (Ainsi, $s_0 = 500$, $s_1 = 1050$, ...)

   a) Calculer u_2, puis exprimer u_n en fonction de n.

   b) Calculer s_2, puis exprimer s_n en fonction de n.

   c) Le 1er janvier 2002, la grand-mère de Julien effectue son dépôt habituel (en francs), puis offre la tirelire à Julien. Quel est le montant de la somme reçue par Julien ? Exprimer cette somme en francs, puis en euros. (Rappel : 1 euro correspond à 6,55957 francs)

2. Avec le cadeau de sa grand-mère, Julien décide d'ouvrir un compte bancaire et d'y placer la plus grande partie de la somme qu'il a reçue.

   Le 1er janvier 2002, il effectue un placement de 3000 euros, à intérêts composés, au taux annuel de 4%. (À la fin de chaque année, les intérêts seront incorporés au capital).

   De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, il décide d'ajouter sur son compte la somme de 200 euros.

   On note :

   - c_n le montant, exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Julien après n années de placement. (Ainsi $c_0 = 3000$)
   - (u_n) la suite définie par $u_n = c_n + 5000$. (Ainsi $u_0 = 8000$)

   a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = 1{,}04\, c_n + 200$.

   b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   c) Exprimer u_n en fonction de n, puis c_n en fonction de n.

   d) Combien d'années, au minimum, Julien devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 6000 euros sur son compte bancaire ?