Quelques exercices à travailler… : Chapitre « les suites numériques »

Exercice n°1 (**suite de Héron** : *permet de calculer une valeur approchée du nombre irrationnel* $\sqrt{2}$)

Soit la suite définie par la relation $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$ et de 1[ier] terme $u_0=4$

1) Calculer les premiers termes de cette suite, c'est-à-dire : $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5...$

2) Que pouvez vous conjecturer ?

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$

3.1) Etudier cette fonction en traçant son tableau de variation

3.2) Monter que la droite d'équation $y=\frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à représentation graphique de cette fonction au voisinage de $+\infty$

3.3) Tracer la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé du plan. Prendre comme échelle : 4 carreaux pour 1 unité et en prenant $x_{max}=4$ et $y_{max}=3$

4) Tracer sur l'axe des abscisses de ce graphique les premiers termes de la suite (u_n) en vous aidant de la droite d'équation $y=x$

5) Que pouvez vous conjecturer au niveau de la convergence de cette suite ?

***6)** Les questions suivantes vont permettre de démontrer que la suite* (u_n) *est convergente (et tend vers* $\sqrt{2}$ *)*

6.1) Montrer que si $\sqrt{2}\le x\le+\infty$ alors $\sqrt{2}\le f(x)\le+\infty$ *(on dit que la fonction* f *est stable sur* $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$)

6.2) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) vérifie pour tout n , on a : $\sqrt{2}\le u_n$

6.3) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est une suite strictement décroissante

6.4) En déduire que la suite (u_n) est une suite convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L\ge\sqrt{2}$

6.5) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{2}$

Exercice n°2

Soit la suite définie par la relation $u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}$ et de 1[ier] terme $u_1=\frac{1}{2}$

1) Démontrer que pour tout n tel que $n\ge1$, on a : $u_n=\frac{n}{n+1}$

2) Démontrer que $u_n=1-\frac{1}{n+1}$

3) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\ge1}$ telle que $v_n=\frac{1}{n}$ est une suite convergente qui converge vers 0

4) Démontrer que la suite $(w_n)_{n\ge1}$ telle que $w_n=\frac{1}{n+1}$ est une suite convergente qui converge vers 0

5) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ telle que $u_n=1-\frac{1}{n+1}$ est une suite convergente qui converge vers 1

Exercice n°3

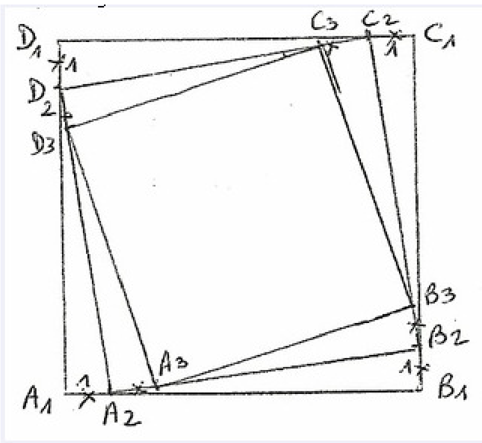
Soit une suite (u_n) géométrique de raison q et de premier terme u_0

1) Etudier la « *monotonie* » et « *la convergence* » de cette suite quand $u_0>0$ et $q>0$ *(question de cours)*

2) Calculer $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ en fonction de u_0 et de q et de n *(question de cours)*

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ quand $0<q<1$

Exercice n° 4



On considère un carré $A_1B_1C_1D_1$ de côté de longueur 10. On construit un carré $A_2B_2C_2D_2$ tel que $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2 = 1$ et on construit ainsi des carrés successifs en décalant de 1 à chaque fois.

Pour tout entier n $\geq$ 1, on désigne par U_n la longueur du côté du carré $A_nB_nC_nD_n$ et on a $U_1 = 10$.

1) Calculer les valeurs exactes de U_2 et U_3 .

2)Justifier la relation de récurrence entre $U_{n+1} = \sqrt{(U_n - 1)^2 + 1}$, pour tout entier n $\geq$ 1

3) Démontrer que pour tout n $\geq$ 1, on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2(1 - U_n)}{\sqrt{(U_n - 1)^2 + 1} + U_n}$

4) Justifier que pour tout entier n $\geq$ 1, $U_n \geq 1$. En déduire le sens de variation de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice n°5

Question 1 : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par la relation $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et de 1ier terme u_1

1.1) Calculer les 3 premiers termes de cette suite, c'est-à-dire les termes u_1 , u_2 et u_3

1.2) Calculer $u_{n+1} - u_n$

Question 2 : Soit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par la relation $w_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et de 1ier terme w_1

2.1) Calculer les 3 premiers termes de cette suite, c'est-à-dire les termes w_1 , w_2 et w_3

2.2) Calculer $w_{n+1} - w_n$

Question 3 : En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout nombre entier $n \geq 1$

INDICATION : *On utilisera la propriété suivante : Si deux suites ont le même premier terme et si, pour les deux suites, chaque terme se déduit du précédent par la même relation, alors ces deux suites sont égales.*

Exercice n°6

Démontrer la formule $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ c'est-à-dire $1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$