Correction Baccalauréat ES/L - Obligatoire
Polynésie - 7 Juin 2013

`www.math93.com`

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **5 points**

Commun est tous les candidats

Cet exercice est un QCM.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. $\boxed{\textbf{Réponse d}}$.

   L'image de $\ln 2$ par f est $f(\ln 2) = \ln 2 \times \mathrm{e}^{-\ln 2} = \dfrac{\ln 2}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = \dfrac{\ln 2}{2}$ soit $\boxed{f(\ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2}$.

2. $\boxed{\textbf{Réponse c}}$.

   La fonction f est de la forme uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Donc f est dérivable comme produit de fonctions qui le sont. On obtient alors $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $u'(x) = 1$, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
   Soit $\boxed{f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}}$.

3. $\boxed{\textbf{Réponse c}}$.

   L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par : $y - f(0) = (x-0)f'(0)$,
   soit $y - 0 = x \times 1$ donc **l'équation de la tangente est** $y = x$.

4. $\boxed{\textbf{Réponse a}}$.

   La dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$ et l'étude de son signe répondra à la question sur la concavité.

   La fonction f' définie par $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ est de la forme uv avec $u(x) = 1-x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Donc f' est dérivable comme produit de fonctions qui le sont.
   On obtient alors $f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $u'(x) = -1$, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
   Soit $\boxed{f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}}$.

   Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x-2)$.
   De ce fait :
   - $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,2[$ et f y est concave ;
   - $f''(2) = 0$;
   - $f''(x) > 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$ et f y est convexe.
     La fonction f est donc concave sur [0 ; 1].

5. $\boxed{\textbf{Réponse c}}$.

   Méthode 1
   Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x} \geq 0$ de façon évidente donc la fonction f est croissante sur cet intervalle.
   On en déduit que : $\forall x \in [0\,;\,1]$, $f(0) = 0 \leq f(x) \leq f(1) = \mathrm{e}^{-1}$
   Alors en intégrant sur $[0\,;\,1]$ on a : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{-1} \times (1-0)$

Et donc $\boxed{0 \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{-1} \approx 0,368}$

De ce fait :
– La réponse a) est exclue car : $\mathrm{e} - 5 < 0$;
– La réponse b) est exclue car : $5 > \mathrm{e}^{-1}$;
– La réponse d) est exclue car : $1 > \mathrm{e}^{-1}$

Méthode 2

On peut aussi obtenir une approximation de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide de la calculatrice.
Le calcul direct nécessite une intégration par partie, qui n'est pas au programme de la terminale ES, même en spécialité mathématiques.

Pour information on obtiendrait :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(-1-x)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1} \approx 0,2642$$

Exercice 2. **5 points**

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

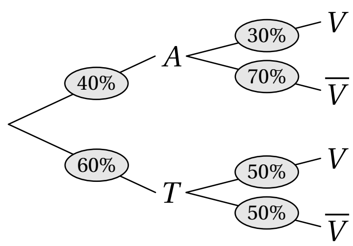
Une étude a produit les données suivantes :
- 40% des clients optent pour la formule « avion + hôtel » et les autres pour la formule « train + hôtel » ;
- parmi les clients ayant choisi la formule « train + hôtel », 50% choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 12% des clients ont choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres. On note :
- A l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » ;
- T l'événement : le client interrogé a choisi la formule « train + hôtel » ;
- V l'événement : le client interrogé a choisi l'option « visites guidées ».

1. **a. Quelle est la probabilité de l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » ?**
On sait que 12% des clients ont choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » donc $\boxed{P(A \cap V) = 12\% = 0,12}$.

b. Calculons $P_A(V)$.
$P_A(V) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(A)} = \dfrac{0,12}{0,4} = 0,3$, et donc $\boxed{P_A(V) = 30\%}$.

c. Représentons cette situation par un arbre pondéré.



2. **a. Montrons que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42**.

Les événements A et T forment une partition de l'univers Ω donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rclcl} P(V) & = & P(V\cap A) & + & P(V\cap T) \\ P(V) & = & 0,12 & + & P_T(V)\times P(T) \\ P(V) & = & 0,12 & + & 0,5\times 0,6 \\ P(V) & = & 0,42 & & \end{array}$$

On a donc, $\boxed{P(V)=42\%}$.

b. Calculons la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au millième.

$$P_{\overline{V}}(A)=\frac{P(A\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}$$

$$P_{\overline{V}}(A)=\frac{P_A(\overline{V})\times P(A)}{1-P(V)}$$

$$P_{\overline{V}}(A)=\frac{0,70\times 0,4}{1-0,42}=\frac{0,28}{0,58}\approx 0,48276$$

On a donc, arrondi au millième : $\boxed{P_{\overline{V}}(A)\approx 48,3\%}$.

3. L'agence pratique les prix (par personne) suivants :
– Formule « avion + hôtel » : 390 euros ;
– Formule « train + hôtel » : 510 euros ;
– Formule « visites guidées » : 100 euros.

Quel montant du chiffre d'affaires l'agence de voyage peut-elle espérer obtenir avec 50 clients qui choisissent un week-end à Londres ?

Soit X la variable aléatoire qui donne le prix du voyage pour une personne. La loi de X est la suivante :

k	390	490	510	610
$P(X=k)$	$P(A\cap\overline{V})=0,4\times 0,7$ $P(A\cap\overline{V})=0,28$	$P(A\cap V)=0,4\times 0,3$ $P(A\cap V)=0,12$	$P(T\cap\overline{V})=0,6\times 0,5$ $P(T\cap\overline{V})=0,30$	$P(T\cap V)=0,6\times 0,5$ $P(T\cap V)=0,30$

L'espérance de X vaut :
$E(X)=390\times 0,28+490\times 0,12+510\times 0,30+610\times 0,30$
$\boxed{E(x)=504}$

Donc pour 50 clients, l'agence peut espérer obtenir un chiffre d'affaire de $\boxed{50\times 504=25\,200\textbf{ euros}}$.

Exercice 3. **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **Calcul du taux d'évolution annuel moyen arrondi au centième**.
   Notons p_n la valeur brute des produits perliers (en milliers d'euros) l'année n.

   – **Taux annuel global**.
   Le taux d'évolution annuel global des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011 est donné par :

   $$T = \frac{p_{2011} - p_{2008}}{p_{2008}} = \frac{63\,182 - 81\,295}{81\,295} \approx -22,28\%$$

   – **Taux annuel moyen**.
   Le taux annuel moyen est le taux t tel que : $p_{2011} = (1+t)^3 \times p_{2008}$
   Le taux annuel global est le taux T tel que : $p_{2011} = (1+T) \times p_{2008}$
   On a donc t qui vérifie l'équation : $(1+t)^3 = 1+T$
   Soit
   $t = (1+T)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx (1-0,2228)^{\frac{1}{3}} - 1$
   $t = (1+T)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx -0,0805886$

   Le taux annuel moyen, arrondi au centième, est donc : $\boxed{T \approx -8,06\%}$.

2. **Si on saisit** $P = 50\,000$ **en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ?**

   L'algorithme permet le calcul de l'année à partir de laquelle la production dépasse strictement $P = 50\,000$.
   Si on fait tourner l'algorithme on obtient :

   – **Étape 1** : $N = 1$ et $U = 0,92 \times 63\,182 = 58\,127,44$;
   – **Étape 2** : $N = 2$ et $U = 0,92 \times 58\,127,44 = 53\,477,244\,8$;
   – **Étape 3** : $N = 3$ et $U = 0,92 \times 53\,477,244\,8 = 49\,199,065\,216$;
   On sort de la boucle car $U < P = 50\,000$;

   – **Affichage** : $\boxed{N = 2011 + 3 = 2014}$.

   Cela correspond à l'année à partir de laquelle les montants d'exportations deviennent inférieurs à 50 000 000 euros.

3. On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le montant en $2011 + n$, en milliers d'euros.

   a. **Montrer que la suite** (u_n) **est une suite géométrique**.
   La valeur baisse tous les ans de 8% donc pour obtenir la valeur l'année n soit u_n, on multiplie la valeur de l'année précédente soit u_{n-1} par $(1-8\%) = 0,92$.
   Par conséquent, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $u_0 = 63\,182$.

   $$\boxed{(u_n) : \begin{cases} u_{n+1} & = & 0,92u_n \\ u_0 & = & 63\,182 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}}$$

   b. **Exprimons** u_n **en fonction de** n.
   La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $u_0 = 63\,182$ donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 63\,182 \times 0,92^n$.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 63\,182 \times 0,92^n}$.

   c. **En 2016, le montant prévu, en milliers d'euros est :** $\boxed{u_5 = 63\,182 \times 0,92^5 \approx 41\,642}$**,**
   soit 41 642 000 euros.

4. **Montants cumulés de 2011 à 2020**.
   Pour calculer le montant cumulés S des produits perliers de 2011 à 2020, il faut sommer les 10 premiers termes de la suite (u_n), suite géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $u_0 = 63\,182$.
   D'après le cours on a :
   $S = u_0 \times \dfrac{1-q^{10}}{1-q} = 63\,182 \times \dfrac{1-0,92^{10}}{1-0,92}$
   $S = 446\,706$

   Le montant cumulé sera donc de $\boxed{\textbf{446 706 milliers d'euros}}$.

Exercice 4. **5 points**

Commun à tous les candidats

A. Étude de la zone 1

1. **Lecture graphique de la valeur de** μ.
   La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$.
   La lecture de μ sur la courbe de la densité de probabilité de X se fait en lisant l'abscisse du point sommet (d'ordonnée maximale) de la gaussienne.
   On a donc ici : $\boxed{\mu = 150}$.

2. **Calcul de la probabilité de pêcher un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm**.
   La probabilité de pêcher un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm est $P(150 \leq X \leq 210)$.
   La calculatrice nous donne : $\boxed{P(150 \leq X \leq 210) \approx 0,48}$ à 10^{-2} près.

3. **Calcul de la probabilité de pêcher un poisson adulte**.
   La probabilité de pêcher un poisson adulte est : $P(X > 120)$.
   La variable X étant positive, $P(X > 120) = 1 - P(0 \leq X \leq 120)$.

   La calculatrice nous donne $P(0 \leq X \leq 120) \approx 0,15865$ et donc :

   $\boxed{P(X > 120) = 1 - P(0 \leq X \leq 120) \approx 0,84}$ à 10^{-2} près.

4. **On considère un nombre** k **tel que** $k > \mu$.
   Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$?
   On sait que puisque X suit une loi normale $N\left(\mu = 150\ ;\ \sigma^2 = 30^2\right)$, on a $P(X < \mu) = 0,5$
   donc puisque $k > \mu$ on a $P(X < k) > P(X < \mu)$.

   Par conséquent : $\boxed{P(X < k) > 0,5}$. **L'affirmation est donc fausse**.

B. Étude de la zone 2

1. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 poissons dans la zone 2 et on constate que 15 poissons sont malades.

   a. Calculons la fréquence f **de poissons malades**.
   On a 15 poissons malades sur les 50 poissons de l'échantillon donc la fréquence est : $f = \dfrac{15}{50} = 0,3 =$ 30%.

   b. Intervalle de confiance au seuil de 95%.
   On a $n = 50$, $f = 30\%$ alors on sait que puisque $n = 50 \geq 30$, $nf = 15 \geq 5$ et $n(1-f) = 35 \geq 5$, l'intervalle de confiance au seuil 95% pour p est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,3 - \frac{1}{\sqrt{50}}\ ;\ 0,3 + \frac{1}{\sqrt{50}}\right]$$

   soit $\boxed{I \approx [0,158579\ ;\ 0,441421] \approx [15,9\%\ ;\ 44,1\%] \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

2. Y suit une loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.

- On a $\mu' = 205$, donc la **courbe 3 est exclue**.
  En effet l'abscisse du point sommet (d'ordonnée maximale) de la gaussienne de la courbe 3 est de 150.

- On a $\sigma' = 40 > \sigma = 30$ donc la courbe représentant la densité de population doit être plus "étalée".
  Il s'agit donc de la **courbe 1**.