BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 7

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.
La page 6 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 – 6 points

Une usine de composants électriques dispose de deux unités de production, A et B.
La production journalière de l'unité A est de 600 pièces, celle de l'unité B est de 900 pièces.

On prélève au hasard un composant de la production d'une journée.

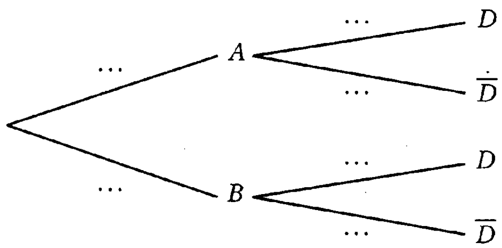
La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité A est égale à 0,014.
La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité B est égale à 0,024.
On note :

- D l'événement : « le composant présente un défaut de soudure »
- A l'événement : « le composant est produit par l'unité A »
- B l'événement : « le composant est produit par l'unité B »

On note $p(D)$ la probabilité de l'événement D et $p_A(D)$ la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

Partie A : généralités

1) a) D'après les données de l'énoncé, préciser $p_A(D)$ et $p_B(D)$.
   b) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.
2) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



3) a) Calculer $p(A \cap D)$ et $p(B \cap D)$.
   b) En déduire $p(D)$.
4) On prélève dans la production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

Partie B : contrôle de qualité

On suppose que les composants doivent présenter une résistance globale comprise entre 195 et 205 ohms.
On admet que la variable aléatoire R qui, à un composant prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, suit une loi normale de moyenne $\mu = 200{,}5$ et d'écart-type $\sigma = 3{,}5$.
On prélève un composant dans la production.
*Les résultats seront arrondis à 0,0001 près, ils pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en **annexe 1**.*

1) Calculer la probabilité p_1 de l'événement : « La résistance du composant est supérieure à 211 ohms ».
2) Calculer la probabilité p_2 de l'événement : « La résistance du composant est comprise dans l'intervalle de tolérance indiqué dans l'énoncé ».
3) On prélève au hasard dans la production trois composants. On suppose que les prélèvements sont indépendants l'un de l'autre et que la probabilité qu'un composant soit accepté est égale à 0,84. Déterminer la probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés.

Exercice 2 – 4 points

Pour chacune des questions posées, une proposition est faite. Il est demandé de déterminer si cette proposition est vraie ou fausse, en justifiant.

Question 1

Un étudiant a travaillé durant l'été et dispose d'un capital de 2500 euros.

A partir du premier septembre 2013, il place son capital $c_0 = 2500$ sur un compte rapportant 0,2% d'intérêts composés par mois et il loue une chambre qui lui coûte 425 euros par mois.
On note c_n le capital disponible, exprimé en euros, au début de chaque mois. Par exemple le capital disponible au début du mois d'octobre vaudra : $c_1 = 1{,}002c_0 - 425 = 2080$ euros.
L'année universitaire s'achève à la fin du mois de juin 2014.

On admet que la suite des capitaux (c_n) est décrite par les relations :
- $c_0 = 2500$
- Pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 1{,}002 \times c_n - 425$

PROPOSITION : Sans apport supplémentaire l'étudiant sera à découvert à partir du début du mois de mars 2014.

Question 2

Sur $I =]0\,; +\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = 2x + 1 - \ln x$.

PROPOSITION : f est une fonction convexe sur I.

Question 3

On définit sur l'intervalle $I =]0\,; +\infty[$, $F(x) = 2x\ln x - 2x + 5$. On a effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel les séquences suivantes :

1	dériver((2x) * ln(x) – 2x + 5)	$2*\ln(x)+\dfrac{2*x}{x}-2$
2	simplifier$\left(2*\ln(x)+\dfrac{2*x}{x}-2\right)$	$\ln(x^2)$

PROPOSITION : F est une primitive de la fonction f définie sur I par $f(x) = 2\ln x$.

Question 4

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}6$.

PROPOSITION : : $P(-0{,}6 \leq X \leq 0{,}6) \approx 0{,}68$

Exercice 3 - 5 points

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.
L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0\,;3{,}6]$).
Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

On a représenté, en **annexe 2**, la fonction B dans un repère du plan.
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.
Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1) Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13000 euros.

2) Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut $B(x) = -5 + (4 - x)e^{x}$.

1) **a)** On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0\,;3{,}6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)e^{x}$.

b) Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I.

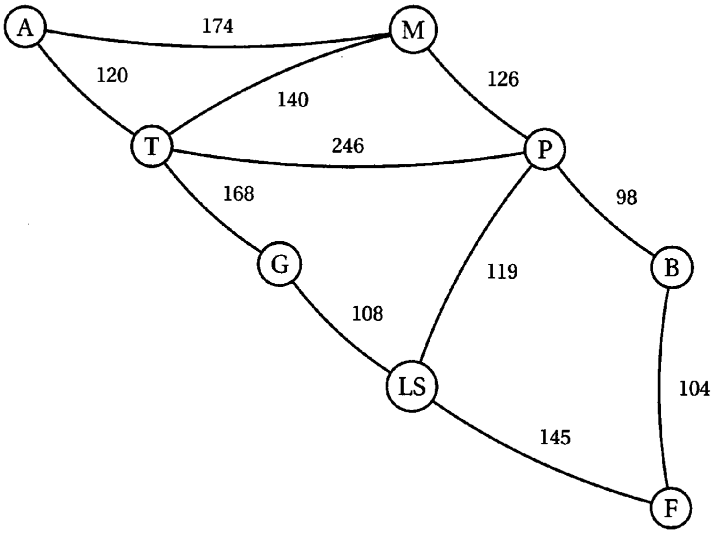
c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.

2) **a)** Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2, l'une dans l'intervalle $[0\,;3]$ l'autre dans l'intervalle $[3\,;3{,}6]$.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

Exercice 4 - 5 points

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.
Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.
Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51 euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois.
Il consulte donc la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.
Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : Étude du trajet

1) Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence. (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).

2) Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).
En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

Partie B : Traversée de Parme

Durant son trajet, le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores. Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge, il s'arrête.
L'expérience lui a permis d'établir que s'il se présente à un feu, il se produit les événements suivants :

- Arrivé au feu, celui-ci est au vert (V) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,85
- Arrivé au feu, celui-ci est orange ou rouge (R) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,30

1) Représenter la situation par un graphe probabiliste.

2) Indiquer la matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre (V, R) en ligne comme en colonne.

3) Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

   a) Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$. (Le détail des calculs n'est pas demandé.)

   b) Conclure quant à la probabilité p de l'événement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu ».

Annexes - à rendre avec la copie

Annexe 1

Extrait de la table de la loi normale pour $\mu = 200{,}5$ **et** $\sigma = 3{,}5$

t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$	t	$p(X \leqslant t)$
186	0,0000	196	0,0993	206	0,9420
187	0,0001	197	0,1587	207	0,9684
188	0,0002	198	0,2375	208	0,9839
189	0,0005	199	0,3341	209	0,9924
190	0,0013	200	0,4432	210	0,9967
191	0,0033	201	0,5568	211	0,9987
192	0,0076	202	0,6659	212	0,9995
193	0,0161	203	0,7625	213	0,9998
194	0,0316	204	0,8413	214	0,9999
195	0,0580	205	0,9007	215	1,0000

Annexe 2