

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2013

MATHÉMATIQUES

**SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INDUSTRIE ET DU
DÉVELOPPEMENT DURABLE**

**SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LABORATOIRE
SPÉCIALITÉ SCIENCES PHYSIQUES ET CHIMIQUES EN
LABORATOIRE**

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 7 pages.

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

EXERCICE 1**(4 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte.

Aucun point ne sera enlevé en cas de réponse incorrecte ou d'absence de réponse.

On considère le nombre complexe $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Le carré de z est égal à :

a. $-4i$

b. -4

c. $-2i$

d. 4

2. L'inverse de z est égal à :

a. $\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b. $-2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

c. $2e^{i\frac{\pi}{4}}$

d. $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

3. L'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ admet pour solution la fonction f définie, pour tout réel x , par :

a. $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b. $f(x) = 5\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

c. $f(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d. $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$

4. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en années, d'un appareil électroménager jusqu'à ce que survienne la première panne.

Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X , suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 8 ans est au centième près :

a. 0,18

b. 0,20

c. 0,71

d. 0,80

EXERCICE 2**(5 points)**

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0,4 u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

On utilise un tableur pour calculer les premiers termes de cette suite.

Une copie d'écran sur laquelle les termes u_1 et u_2 ont été effacés est donnée en **annexe 1** (page 7).

2. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 de la feuille de calcul afin d'obtenir les premiers termes de cette suite par recopie vers le bas ?
3. En utilisant cette copie d'écran, que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel U.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 8
Traitement :	TANT QUE $U - 5 > 0,01$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Affecter à U la valeur $0,4U + 3$
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher N

Par rapport à la suite (u_n) , quelle est la signification de l'entier N affiché ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 5$. On admet que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 0,4.
- a. Exprimer v_n en fonction de n .
- b. Déterminer la limite de la suite (v_n) .
- c. Le résultat précédent permet-il de valider la conjecture faite à la question 3 ? Pourquoi ?

EXERCICE 3

(4 points)

La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100°C . Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20°C .

Théo lui rétorque que quand il sera à 37°C il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela.

La température du plat est donnée par une fonction g du temps t , exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle : $(E) \ y' + 0,04y = 0,8$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et donner sa solution particulière g définie par la condition initiale $g(0) = 100$.
2. En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée :
 - a. La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37°C ?
 - b. Quelle est la valeur exacte du temps nécessaire pour obtenir cette température ?
En donner une valeur arrondie à la seconde près.

EXERCICE 4

(7 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'exploitation de divers outils mathématiques pour analyser la qualité de cette production.

A. Loi normale

Une pièce est conforme lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[74,4 ; 75,6]$.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,25.

1. Calculer $P(74,4 \leq L \leq 75,6)$.
2. Quelle valeur doit-on donner à h pour avoir $P(75 - h \leq L \leq 75 + h) = 0,95$?

B. Loi binomiale

Les pièces produites par l'entreprise sont livrées par lots de 20.

On note D l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme ».

On suppose que $P(D) = 0,02$.

On prélève au hasard 20 pièces dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 20 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,02.
2. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme dans ce lot de 20 pièces.
4. Calculer l'espérance mathématique, $E(X)$, de cette variable aléatoire et interpréter le résultat.

C. Intervalle de fluctuation

Le cahier des charges établit que la proportion de 2% de pièces non conformes dans la production est acceptable.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des pièces non conformes dans un échantillon de taille 80.

On veut savoir si la machine de production est correctement réglée. Pour cela on prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 80 dans lequel 3 pièces se révèlent être non conformes.

2. Quelle est la fréquence des pièces non conformes dans l'échantillon prélevé?
3. La machine de production doit-elle être révisée ? Justifier votre réponse.

Annexe 1

	A	B
1	n	u(n)
2	0	8
3	1	
4	2	
5	3	5,192
6	4	5,0768
7	5	5,03072
8	6	5,012288
9	7	5,0049152
10	8	5,00196608
11	9	5,00078643
12	10	5,00031457
13	11	5,00012583
14	12	5,00005033
15	13	5,00002013
16	14	5,00000805
17	15	5,00000322
18	16	5,00000129
19	17	5,00000052
20	18	5,00000021