LIBAN BAC S 2013 - *non spécialistes*

Éléments de correction

* * *

Exercice 1
Q1. d
$\vec{u}_1(1,2,3)$ et $\vec{u}_2(1,1,-1)$ sont des vecteurs directeurs, respectivement de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$.

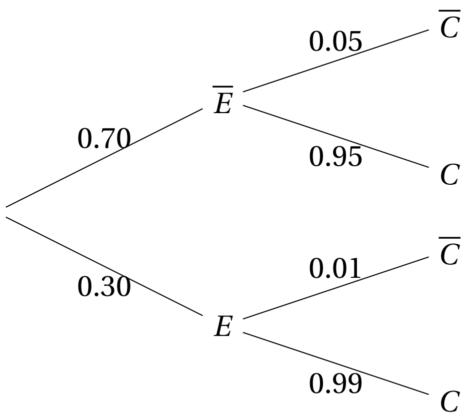
Q2. c
$\vec{u}_2$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$ et $t+1+2t-1-(3t+2)+2=0$ donc $\mathscr{P}$ contient $\mathscr{D}$.

Q3. c
$\overrightarrow{AB}(2,4,6)$, $\overrightarrow{AC}(-4,6,2)$ et $\overrightarrow{BC}(-6,2,-4)$, on a $AB = AC = BC$.

Q4. b
Pour $k=0$ on obtient que le point $M(1,3,4)$ appartient à $\mathscr{D}'$.$\vec{u}_2$ et $\overrightarrow{AM}$ sont deux vecteurs coplanaires de $\mathscr{P}'$ non colinéaires et pour $\vec{n}(3,-1,2)$ on a $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = \vec{n}.\vec{u}_2 = 0$.

Exercice 2
Partie A.

1. Arbre pondéré de la situation :



2. $\mathbb{P}(\overline{E}\cap C) = \mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(C) = 0.70 \times 0.95 \simeq 0.665$.
3. D'après la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\overline{E}\cap C) + \mathbb{P}(E\cap C) = 0.70\times 0.95 + 0.30 \times 0.99 \simeq 0.962$.
4. $\mathbb{P}_C(E) = \dfrac{\mathbb{P}(C\cap E)}{\mathbb{P}(C)} \simeq 0.309$.

Partie B.

1. $\mathbb{P}(0.16 \le X \le 0.18) \simeq 0.9044$.
2. (a) Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (b) $0.16 \le X \le 0.18 \Leftrightarrow \dfrac{0.16-0.17}{\sigma_2} \le \dfrac{X-0.17}{\sigma_2} \le \dfrac{0.16-0.18}{\sigma_2} \Leftrightarrow \dfrac{-0.01}{\sigma_2} \le Z \le \dfrac{0.01}{\sigma_2}$
   L'intervalle est donc $\left[\dfrac{-0.01}{\sigma_2}, \dfrac{0.01}{\sigma_2}\right]$.
   (c) On obtient $\dfrac{0.01}{\sigma_2} \simeq 2.57$ et $\sigma_2 \simeq 0.004$.

Exercice 3
Partie A.

1. $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0$.

   La droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_1$ au voisinage de $+\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontaleà $\mathscr{C}_1$ au voisinage de $-\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$$
3. f_1 est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas et :
$$f_1'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$
   Quotient de termes strictement positifs, f_1 est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

   I est la valeur de l'aire, en unités d'aire, comprise entre $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les axes $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B.

1. $f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{1+e^x} = 1$.
2. $M(x, f_1(x))$ et $P(x, f_{-1}(x))$ donc $K\left(\frac{x+x}{2}, \frac{f_1(x)+f_{-1}(x)}{2}\right)$ d'où $K(x, \frac{1}{2})$.
3. On en déduit que $\mathscr{C}_{-1}$ est obtenue par symétrie de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe $y = 1/2$.
4. L'aire cherchée est :
$$\int_0^1 f_1(x) - f_{-1}(x)dx = \int_0^1 f_1(x) - (1 - f_1(x))dx = \int_0^1 2f_1(x)_1 dx = 2I - 1 = 2\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - 1$$

Partie C.

1. **VRAIE :** On a $f_k'(x) = \frac{ke^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^2}$.
   - pour $k > 0$, on a f_k décroissante et $\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$
   - pour $k < 0$, on a f_k croissante et $\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 1$
   - pour $k = 0$, on a $f_0(x) = 1/2$ pour tout x.
2. **FAUSSE :** contre exemple : $k = -1$.
3. **VRAIE :** La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{1+e^{-t/2}}$ est croissante et $g(10) \simeq 0.993 > 0.99$.

Exercice 4
Partie A.

1. Il s'agit de l'algorithme 3.
2. (v_n) semble croissante et convergente vers un réel proche de 2.97.
3. (a) On note $P(n)$ la propriété "$0 < v_n < 3$"
   Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n, alors on a :

$$\begin{aligned} & 0 < v_n < 3 \\ \Longrightarrow\; & -3 < -v_n < 0 \\ \Longrightarrow\; & 3 < 6 - v_n < 6 \\ \Longrightarrow\; & \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \\ \Longrightarrow\; & \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < 3 \\ \Longrightarrow\; & 0 < v_{n+1} < 3 \end{aligned}$$

   $P(n+1)$ est encore vraie.

   (b)
$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$

   Puisque $0 < v_n < 3$, on a que $6 - v_n > 0$ pour tout n et donc pour tout n, $v_{n+1} - v_n > 0$ et (v_n) est croissante.

   (c) (v_n) est croissante et majorée par 3, elle est donc convergente.

Partie B.

1.
$$w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1} - 3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6 - v_n} - 3}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{9 - 3 \times (6 - v_n)}{6 - v_n}} = \frac{6 - v_n}{-9 + 3v_n}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3 - v_n + 3}{v_n - 3} = \frac{1}{3} \times \left(-1 + \frac{3}{v_n - 3}\right)$$

$$= w_n - \frac{1}{3}$$

2. $w_n = w_0 - \dfrac{1}{3}n = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{3} = -\dfrac{3 + 2n}{6}$ puis $v_n = \dfrac{1}{w_n} + 3 = -\dfrac{6}{3 + 2n} + 3$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$.