Correction Baccalauréat ES - Obligatoire
Amérique du Nord - 30 Mai 2013

`www.math93.com`

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **4 points**

Commun à tous les candidats

QCM.

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

   a. $-\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$ **b.** $\boxed{\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}}$ **c.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$ **d.** e^{a}

   C'est une définition de l'inverse d'un réel b qui est $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$ avec ici $b = \mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$ puisque $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}\right)^{-1}$.

2. Pour tout réel a, le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

   a. $\boxed{\sqrt{\mathrm{e}^{a}}}$ **b.** $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{2}$ **c.** $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{2}}$ **d.** $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$

   Encore une question de cours, pour x réel positif on a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ par définition. On prend $x = \mathrm{e}^{a}$ car $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} = \left(\mathrm{e}^{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. Pour tout réel $x < 0$, le nombre réel $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ est égal à :

   a. $\ln(x)$ **b.** $\boxed{-\ln(-x)}$ **c.** $-\ln(x)$ **d.** $\dfrac{1}{\ln(-x)}$

   On a $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ pour a et b strictement positifs donc ici :
   $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{-x}\right)$
   $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \ln 1 - \ln(-x)$
   $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(-x)$ car $\ln 1 = 0$.
   Donc c'est la réponse *b*..

4. On donne la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
   La dérivée de f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

   a. $f'(x) = 1$ **b.** $f'(x) = \ln(x)$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ **d.** $\boxed{f'(x) = \ln(x) + 1}$

   f est de la forme uv avec $u(x) = x$, et $v(x) = \ln x$ donc $u'x) = 1$, et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Sur $]0\,;\,+\infty[$, f est dérivable et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

Exercice 2. **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.

   a. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 **et** 35 **ans**.
   La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètre $m = 40,5$ et $\sigma = 12$.
   On cherche $P(30 \leq X \leq 35)$ et la calculatrice donne $P(30 \leq X \leq 35) \approx 0{,}132569$
   On a donc $\boxed{P(30 \leq X \leq 35) \approx 13,3\%}$ à 10^{-3} près.

   b. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.
   On cherche ici $P(X \geq 55) = 1 - P(0 < X < 55) \approx 1 - 0,8865 \approx 0,114$.
   On a donc $\boxed{P(X \geq 55) \approx 11,4\%}$ à 10^{-3} près.

2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.
   Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.

   a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.
   On a $n = 1000$, $p = 75\%$ alors on sait que puisque $n = 1000 \geq 30$, $np = 750 \geq 5$ et $n(1-p) = 250 \geq 5$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence F est :

   $$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

   soit $\boxed{I \approx [0{,}72316 \ ; \ 0{,}77683] \approx [72,3\% \ ; \ 77,7\%] \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

   b. Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées. **Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %**.
   On va déterminer la valeur de la fréquence observée f sur un échantillon de taille $n = 1000$.
   – Si f est dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% pour la fréquence, on valide l'hypothèse au seuil 95% ;
   – Sinon, on rejette au risque 5% l'hypothèse.

   c. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?
   Ici $f = \dfrac{600}{1000} = 60\%$ n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95%. Le slogan est visiblement infondé.

Exercice 3. **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013+n)$.
On donne $u_0 = 42$.

1. **Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$.**
   - u_{n+1} le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013+n+1)$ s'obtient à partir du u_n sachant que :
     - Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages de l'année passée donc il est reste 95% × u_n ;
     - On achète de plus 6 000 ouvrages neufs soit 6 milliers .
   - On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, $\boxed{u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 6}$
2. **Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.**

```
Variables :
   U, N
Initialisation :
   Mettre 42 dans U
   Mettre 0 dans N
Traitement :
   Tant que U < 100
      U prend la valeur U × 0,95 + 6
      N prend la valeur N +1
   Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

   Cet algorithme permet de calculer le rang du premier terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est supérieur ou égal à 100.
3. **À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.**
   A l'aide de la calculatrice on obtient :

n	$u(n)$
25	98,3636133
26	99,44543263
27	100,473161
28	101,449503

   Et donc le rang du premier terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est supérieur ou égal à 100 est $\boxed{n = 27}$.
   On a $u_{27} \approx 100,4732 > 100$, alors que $u_{26} \approx 99,4454 < 100$

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013+n)$.

1. **Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.**
   Le nouvel algorithme devient :

```
Variables :
    U, N
Initialisation :
    Mettre 42 dans U
    Mettre 0 dans N
Traitement :
    Tant que U < 100
        U prend la valeur U × 0,95 + 4
        N prend la valeur N +1
    Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0,95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
Montrer que (w_n) **est une suite géométrique de raison** $q = 0,95$ **et préciser son premier terme** w_0.

$$\begin{array}{lrcl} \text{On a} & w_{n+1} & = & v_{n+1} - 80 \\ \text{Soit} & w_{n+1} & = & 0,95v_n + 4 - 80 \\ & w_{n+1} & = & 0,95v_n - 76 \\ & w_{n+1} & = & 0,95\left(v_n - \dfrac{76}{0,95}\right) \\ & w_{n+1} & = & 0,95\,(v_n - 80) \\ \text{Donc} & w_{n+1} & = & 0,95w_n \end{array}$$

La suite (w_n) **est une suite géométrique de raison** $q = 0,95$ **et de premier terme** $w_0 = v_0 - 80 = 42 - 80 = -38$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $w_n = -38 \times (0,95)^n$.

a. Déterminer la limite de (w_n).
On sait que si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{q}^n = 0$, donc ici :

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$, soit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0}$.

b. En déduire la limite de (v_n).

Puisque $v_n = w_n + 80$, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 80}$.

c. Interpréter ce résultat.
Le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles de la médiathèque va donc tendre vers 80 000.

Exercice 4. **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

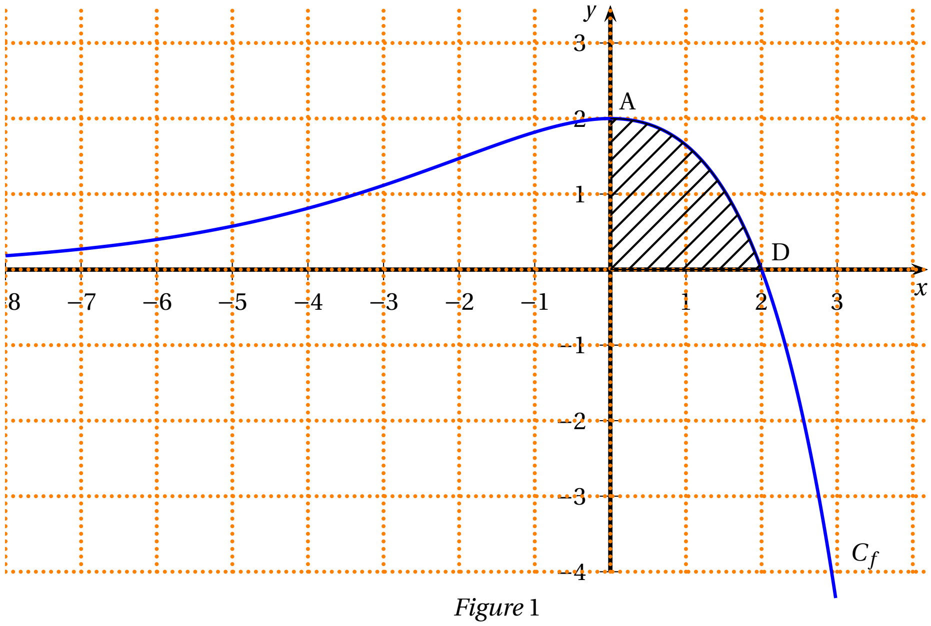

Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.
On sait que :

- Les points A(0 ; 2) et D(2 ; 0) appartiennent à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe Cf au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1. **Par lecture graphique, indiquer les valeurs de** $f(2)$ **et** $f'(0)$.
   - Puisque le point D(2 ; 0) appartiennent à la courbe C_f on a $\boxed{f(2) = 0}$;
   - La tangente à la courbe Cf au point A(0 ; 2) est parallèle à l'axe des abscisses, donc $\boxed{f'(0) = 0}$.
2. **Calculer** $f'(x)$.
   La fonction f est de la forme uv avec $u(x) = b - x$ soit $u'(x) = -1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{ax}$ soit $v'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$.
   La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont et sa dérivée est donnée par $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{ax} + (b - x) \times a\mathrm{e}^{ax}$.
   Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = (-ax - 1 + ab)\mathrm{e}^{ax}}$.
3. **En utilisant les questions précédentes, montrer que** a **et** b **sont solutions du système suivant** :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b-2 & = & 0 \\ ab-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

   On a vu que :
   - $f(2) = 0$ or $f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax}$ donc $(b - 2)\mathrm{e}^{2a} = 0$ et puisque $\mathrm{e}^{2a} > 0$ on obtient $b - 2 = 0$;
   - $f'(0) = 0$ or $f'(x) = (-ax - 1 + ab)\mathrm{e}^{ax}$ donc $(-1 + ab)\mathrm{e}^0 = -1 + ab = 0$.

   De ce fait, les réels a et b sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b-2 & = & 0 \\ ab-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

4. **Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.**
La première équation du système nous donne $b = 2$, puis, en remplaçant b par 2 dans la deuxième, on obtient $a = \dfrac{1}{2}$. L'expression de la fonction f est donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = (2-x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{0,5x}$.

1. **À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 2 et 4.**
La figure 1 nous montre :
   - D'une part que $f(x)$ est positif sur l'intervalle $[2\,;\,4]$,
   et donc que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la de la surface du plan délimitée par : la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites (verticales) d'équations $x = 0$ et $x = 2$;
   - D'autre part que $\forall x \in [0\,;\,2]$, $0 \leq f(x) \leq 2$ et donc que l'aire recherchée est incluse dans un carré de côtés 2 unités et donc inférieure à 4 unités.
   - Pour finir, partie de la courbe Cf entre A et D est au dessus du segment [AD] et donc l'aire recherchée est supérieure à l'aire du triangle rectangle isocèle en O, OAD et donc supérieure à 2 unités d'aire.

   Pour conclure, $\boxed{2 \leq \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 4}$.

2. **a.** On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$.
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
La fonction F est de la forme uv avec $u(x) - 2x + 8$ soit $u'(x) = -2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{0,5x}$ soit $v'(x) = 0,5\mathrm{e}^{0,5x}$.
La fonction F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont et sa dérivée est donnée par $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -2 \times \mathrm{e}^{0,5x} + (-2x+8) \times 0,5\mathrm{e}^{0,5x}$.
Soit après réduction, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F'(x) = (2-x)\mathrm{e}^{ax} = f(x)}$, ce qui prouve que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$ avec $F(x) = (-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = (-4+8)\mathrm{e}^1 - (0+8)\mathrm{e}^0$.
Soit $\boxed{\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^1 - 8 \approx 2,87}$

3. **On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$. Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G. Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse**.

- **Méthode 1** : Puisque G est une primitive de f on a $G'(x) = f(x)$ et donc $G'(0) = f(0) = 2$.
  La courbe de la fonction G doit donc présenter une tangente en $x = 0$ de coefficient directeur 2.
  - Cela élimine clairement C_1 dont le coefficient directeur de la tangente en $x = 0$ est négatif;
  - Cela élimine aussi C_2 dont le coefficient directeur de la tangente en $x = 0$ semble bien supérieur à 2;
  - Seule, la courbe C_3 présente une tangente en $x = 0$ de coefficient directeur 2.

- **Méthode 2** : Pour avoir confirmation, on peut aussi faire le lien entre le signe de $G'(x)$ et celui de $f(x)$ puisque $G'(x) = f(x)$. On sait que $f(x)$ est positif sur $]-\infty\ ;\ 2]$ et négatif sur $[2; +\infty[$. Or, seule la fonction G de courbe C_3 est croissante sur $]-\infty; 2]$ et décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

La courbe qui convient est donc $\boxed{\text{la courbe } C_3}$.

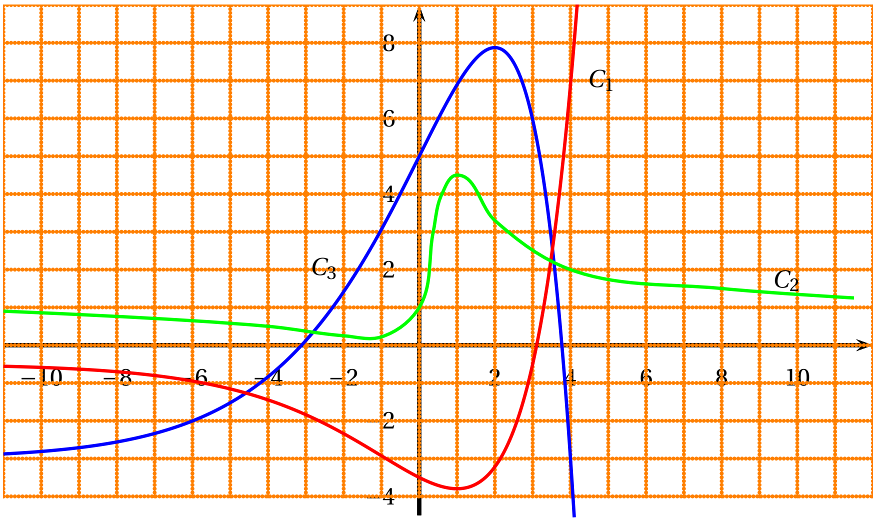

Figure 2