Baccalauréat ES - Spé. Maths
Amérique du Nord - 30 Mai 2013

`www.math93.com`

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité maths

Exercice 1. **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte quatre réponses possibles.
Pour chacune de ces questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Recopier pour chaque question la réponse exacte, on ne demande pas de justification.
Chaque réponse exacte rapportera 1 *point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

a. $-\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$ **b.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}$ **c.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$ **d.** e^{a}

2. Pour tout réel a, le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

a. $\sqrt{\mathrm{e}^{a}}$ **b.** $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{2}$ **c.** $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{2}}$ **d.** $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$

3. Pour tout réel $x < 0$, le nombre réel $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ est égal à :

a. $\ln(x)$ **b.** $-\ln(-x)$ **c.** $-\ln(x)$ **d.** $\dfrac{1}{\ln(-x)}$

4. On donne la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
La dérivée de f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

a. $f'(x) = 1$ **b.** $f'(x) = \ln(x)$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ **d.** $f'(x) = \ln(x) + 1$

Exercice 2. **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne $40,5$ et d'écart type 12.

   a. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.

   b. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.

   Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.

   a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.

   b. Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées.

   Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.

   c. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

Exercice 3. **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,9$.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,8$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. **a.** Traduire les données par un graphe probabiliste.
  b. Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
  c. Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - \dfrac{8}{9}$.
  a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
  b. Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.

4. **a.** Déterminer en justifiant la limite de (a_n).
  b. Interpréter ce résultat.

Exercice 4. **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

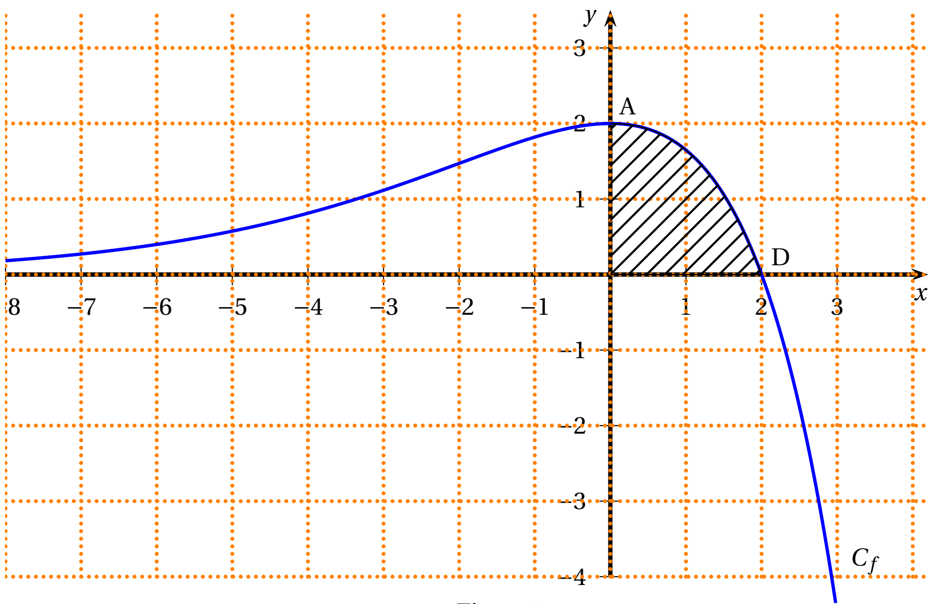

Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.
On sait que :

- Les points $A(0\,;\,2)$ et $D(2\,;\,0)$ appartiennent à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe Cf au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b-2 & = & 0 \\ ab-1 & = & 0 \end{cases}$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 2 et 4.
2. **a.** On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$.
   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G.
   Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

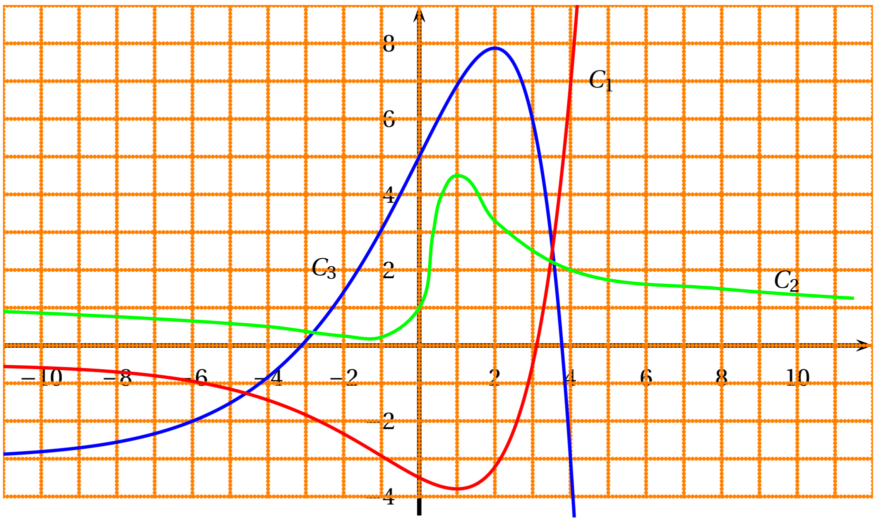

Figure 2