

Correction du Baccalauréat S Pondichéry Avril 2013

Exercice 1.

5 points

Commun à tous les candidats

Partie 1

La fonction h est définie par $h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$ avec a et b constantes réelles positives.

– D'après les données, $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 2$.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} be^{-0,04t} = 0$ et donc $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = a = 2}$.

– De plus $h(0) = 0,1$.

Or $h(0) = \frac{a}{1+b}$ soit $0,1 = \frac{2}{1+b}$ d'où $\boxed{b = 19}$.

On obtient donc $\boxed{h(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}}$.

Partie 2

$$1. \quad \boxed{f'(t) = \frac{1,52e^{-0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}}$$

La dérivée de f est donc strictement positive sur $[0;250]$ et donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

2. On cherche alors à résoudre l'inéquation $f(t) > 1,5$ soit $\frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}} > 1,5$.

On obtient $0,5 > 28,5e^{-0,04t} \iff \frac{1}{57} > e^{-0,04t}$.

La fonction \ln étant strictement croissante sur $[0;250]$ on a donc :

$$\ln\left(\frac{1}{57}\right) > \ln(e^{-0,04t}) \iff -\ln 57 > -0,04t \iff \boxed{t > \frac{\ln(57)}{0,04} = 25 \ln(57) \approx 101,08}$$

3. a. On a $f(t) = \frac{2 \times e^{0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t}) \times e^{0,04t}}$ soit $\boxed{f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}}$.

La fonction F définie sur $[0;250]$ par $F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$ est bien une primitive de la fonction f car sa dérivée F' est égale à f .

$$F'(t) = \frac{50 \times 0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = \frac{2 \times e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = f(t).$$

b. La valeur moyenne de f sur $[50;100]$ est donnée par : $m = \frac{1}{50} \int_{50}^{100} f(t) dt$.

$$\frac{1}{50} \int_{50}^{100} f(t) dt = \frac{1}{50} [F(t)]_{50}^{100} = \frac{1}{50} (F(100) - F(50)) = \ln\left(\frac{e^4 + 19}{e^2 + 19}\right)$$

$$\boxed{m = \frac{1}{50} \int_{50}^{100} f(t) dt = \ln\left(\frac{e^4 + 19}{e^2 + 19}\right) \approx 1,03} \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Cela correspond à la taille moyenne du plant de maïs entre le 50ème et le 100ème jour.

4. Le nombre dérivé $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a . On cherche donc graphiquement le point de la courbe qui a une tangente de coefficient directeur maximal. Une valeur approchée de a est alors 73, la hauteur du plant est donc de $f(73) \approx 0,99$ m à 10^{-2} près.

Exercice 2. QCM

4 points

Commun à tous les candidats

1. Réponse b)

Le point $B(0;1;-1)$ appartient à (P), ce qui élimine les choix c) et d), et a) est l'équation d'une droite.

2. Réponse c)

En remplaçant les coordonnées d'un point de (D) dans l'équation de (P) on obtient :

$\forall t \in \mathbb{R} (-2+t) - 2(-t) + 3(-1-t) + 5 = 0$. Donc tout point de (D) est dans (P).

3. Réponse a)

$\vec{MN} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (D).

4. Réponse b)

Le plan (S) est caractérisé par le point $C(-2;0;-1)$ et par les deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On prend $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

a. La forme algébrique de Z_M est $Z_M = 1 - i\sqrt{3}$.

b. $Z_{M'} = -iZ_M = -i(1 - i\sqrt{3})$ soit $Z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Alors $|Z_{M'}| = 2$ et $\arg Z_{M'} = -\frac{5\pi}{6} \text{ mod } 2\pi$.

c. Vérification graphique évidente dans (O, \vec{u}, \vec{v}) .

2. On prend $Z_M = x + iy$.

a. Le point I est le milieu du segment [AM] donc $I \left(\frac{Z_A + Z_M}{2} \right)$ soit $I \left(\frac{x+1}{2} + \frac{y}{2}i \right)$.

b. $Z_{M'} = -iZ_M$ donc $Z_{M'}(y - xi)$

c. $I \left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2} \right)$, $B(0;1)$ et $M'(y; -x)$.

d. Montrons que (OI) est une hauteur de OBM'.

- Le produit scalaire $\vec{OI} \begin{pmatrix} \frac{x+1}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{BM'} \begin{pmatrix} y \\ -x-1 \end{pmatrix} = 0$ donc la droite (OI) est perpendiculaire à (BM').

- La droite (OI) est donc une hauteur de OBM'

e. $OI^2 = \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{4}$ et $BM'^2 = y^2 + (x+1)^2$ donc $BM'^2 = 4OI^2$ soit $BM' = 2OI$.

Exercice 3.

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On a $A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125j_n + 0,525a_n \\ 0,625j_n + 0,625a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ soit : $A \times U_n = U_{n+1}$.

b. $U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$ donc $U_1 \approx \begin{pmatrix} 287 \\ 437 \end{pmatrix}$.

De même :

$U_2 = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 287 \\ 437 \end{pmatrix}$ donc $U_2 \approx \begin{pmatrix} 265 \\ 452 \end{pmatrix}$.

c. On obtient facilement (récurrence immédiate) : $U_n = A \times U_{n-1} = A^n U_0$.

2. a. On a :

$Q \times D = \begin{pmatrix} -1,75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix}$ et donc $Q \times D \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1,75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} = A$.

On a bien montré que : $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

b. Montrons par récurrence que : $Q \times D^n \times Q^{-1} = A^n$.– **Initialisation** pour $n = 1$: $A = Q \times D \times Q^{-1}$ d'après la question 2°a).– **Hérédité** : Supposons que pour n fixé, $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$, alors :

$$A^{n+1} = A \times A^n = A \times (Q \times D^n \times Q^{-1})$$

$$A^{n+1} = Q \times D \times \underbrace{Q^{-1} \times Q}_{Id} \times D^n \times Q^{-1}$$

$$A^{n+1} = Q \times D \times Id \times D^n \times Q^{-1}$$

$$A^{n+1} = Q \times D^{n+1} \times Q^{-1}$$

– **Conclusion** : On a donc prouvé que pour tous les entiers n : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

c. La matrice D étant diagonale on a : $D^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. a. On a montré que $U_n = A^n U_0$, et donc :

$$U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Et donc

$$U_n = \begin{pmatrix} j_n = 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ a_n = 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,25)^n = 0$ et de ce fait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 450 \end{pmatrix}.$$

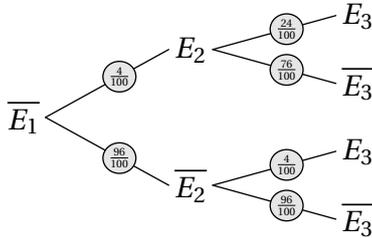
b. La population va tendre à se stabiliser vers 270 jeunes et 450 adultes.

Exercice 4.

6 points

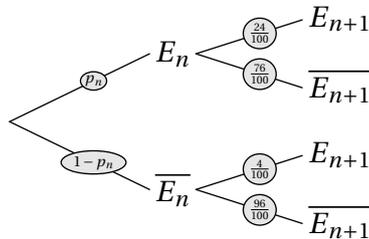
Commun à tous les candidats

1. a. On a en utilisant l'arbre, $p_3 = \frac{24}{10} \times \frac{4}{100} + \frac{4}{100} \times \frac{96}{100}$ soit $p_3 = \frac{480}{10000} = \frac{4,8}{100}$.



- b. $P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{\frac{4}{100} \times \frac{24}{100}}{p_3}$ donc $P_{E_3}(E_2) = \frac{96}{480} = 0,2$.

2. a. Arbre de probabilité.



- b. En utilisant l'arbre précédent on a, pour n entier $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$$

$$p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n)$$

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$$

- c. Pour n entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05$$

$$u_{n+1} = 0,2p_n + 0,04 - 0,05$$

$$u_{n+1} = 0,2p_n - 0,01$$

$$u_{n+1} = 0,2(p_n - 0,05)$$

Et donc $u_{n+1} = 0,2u_n$ ce qui prouve que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $u_0 = p_0 - 0,05 = -0,05$.

$$\text{Alors } u_n = -0,05(0,2)^n$$

$$\text{et donc } p_n = u_n + 0,05 = -0,05(0,2)^n + 0,05$$

$$p_n = 0,05(1 - (0,2)^n)$$

- d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,2)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,05$.

- e. Pour K fixé, J est le rang du terme de la suite tel que $P_J < 0,05 - 10^{-K}$. La suite était croissante et convergente vers 0,05, on sait qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[0,05 - 10^{-K}; 0,05]$ et donc l'algorithme s'arrête.

3. a. L'expérience consistant à tester un salarié et à appeler succès le fait qu'il soit malade une semaine donnée, est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,05$.

Lorsqu'on teste au hasard les 220 employés, on répète la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante. X présentant le nombre de succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, X suit un loi Binomiale de paramètre $p = 0,05$ et $n = 220$.

$$\text{On a donc : } \mu = E(X) = np = 11 \text{ et } \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10,45}$$

b. On cherche à calculer $P(7 \leq X \leq 15)$.

$$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{7 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{15 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{7 - 11}{\sqrt{10,45}} \leq Z \leq \frac{15 - 11}{\sqrt{10,45}}\right)$$

$$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{-4}{\sqrt{10,45}} \leq Z \leq \frac{4}{\sqrt{10,45}}\right)$$

Or Z suit la loi normale centrée réduite et donc puisque $\frac{4}{\sqrt{10,45}} \approx 1,237$ on a en utilisant le tableau donné :

$$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{4}{\sqrt{10,45}}\right) - P\left(Z \leq \frac{-4}{\sqrt{10,45}}\right)$$

$$P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,892 - 0,108$$

$$\boxed{P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,784}$$

Remarque :

On peut aussi utiliser les propriétés de la gaussienne et écrire :

$$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{4}{\sqrt{10,45}}\right) - P\left(Z \leq \frac{-4}{\sqrt{10,45}}\right)$$

$$P(7 \leq X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{4}{\sqrt{10,45}}\right) - \left(1 - P\left(Z \leq \frac{4}{\sqrt{10,45}}\right)\right)$$

$$P(7 \leq X \leq 15) = 2 \times P\left(Z \leq \frac{4}{\sqrt{10,45}}\right) - 1$$

$$P(7 \leq X \leq 15) \approx 2 \times 0,892 - 1$$

$$\boxed{P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,784}$$