

Amérique du Nord - BAC S 2013

Éléments de correction

* * *

Exercice 1

1. $\overrightarrow{AB}(1, -1, -1)$ et $\overrightarrow{AC}(2, -5, -3)$ ne sont pas colinéaires.
2. (a) $\vec{u}(2, -1, 3)$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 + 1 - 3 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 5 - 9 = 0$$

$\vec{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) , il définit ainsi un vecteur normal à ce plan.

- (b) $(ABC) : 2x - y + 3z + d = 0$ et $A \in (ABC)$ donne $d = 1$ et on a l'équation du plan :

$$(ABC) : 2x - y + 3z + 1 = 0$$

$$(c) \Delta : \begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$(d) H \in \Delta \text{ donc il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x_H = 2t + 7 \\ y_H = -t - 1 \\ z_H = 3t + 4 \end{cases}$$

De plus, $H \in (ABC)$ donc :

$$2x_H - y_H + 3z_H + 1 = 0$$

ce qui donne : $4t + 14 + t + 1 + 9t + 12 + 1 = 0$ c'est-à-dire $t = -2$. Finalement :

$$H(3, 1, -2)$$

3. (a) On considère $\vec{n}_1(1, 1, 1)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_1$ et $\vec{n}_2(1, 4, 0)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_2$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$(b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4y - 2 + y + z = 0 \\ x = -4y - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3y + 2 \\ x = -4y - 2 \end{cases}$$

En posant $y = t$ comme paramètre :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t \\ z = -4t - 2 \end{cases}$$

- (c) On cherche une éventuelle intersection entre d et (ABC) . $d \cap (ABC) \neq \emptyset$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $2(-4t - 2) - t + 3(3t + 2) + 1 = 0$. Or cette équation est équivalente à $3 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $d \parallel (ABC)$.

Exercice 2

1. (a) L'algorithme renvoie 1,8340.
- (b) Il permet de calculer u_n en choisissant la valeur de n .

- (c) (u_n) semble croissante et convergente.
2. (a) Montrons par récurrence que $0 < u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On définit $P(n)$ la propriété " $0 < u_n \leq 2$ ".

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 2$ et $P(0)$ vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n . Alors par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & 0 < u_n \leq 2 \\ \implies & 0 < 2u_n \leq 4 \\ \implies & 0 < \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4} \quad \text{la fonction racine carrée étant croissante} \\ \implies & 0 < u_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

- (b) On sait que la suite (u_n) est à termes strictement positifs, on peut alors étudier le quotient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}$$

De plus $u_n \leq 2$ donc $\frac{2}{u_n} \geq 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. La suite est donc croissante.

- (c) La suite est croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.
3. (a) Tout d'abord, $v_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$. Ensuite :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln 2 \\ &= \ln(\sqrt{2u_n}) - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} \ln(2u_n) - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln u_n - \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln u_n - \ln 2) \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

(b) $v_n = v_0 \times q^n = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\ln u_n = v_n + \ln 2$ donc $u_n = e^{v_n + \ln 2} = e^{(1 - \frac{1}{2^n}) \ln 2}$, finalement : $u_n = 2^{1 - \frac{1}{2^n}}$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

(d)	Variables :	n est un entier naturel u est un réel
	Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
	Traitement :	TANT QUE $u \leq 1,999$ u prend la valeur $\sqrt{2u}$ n prend la valeur $n + 1$ Fin TANT QUE
	Sortie :	Afficher n

Exercice 3**Partie A.**

- 0,637
- $p = \mathbb{P}(X \geq 385) = 0,5 + \mathbb{P}(385 \leq X \leq 400) \simeq 0,914$.
- Soit X suivant une loi $\mathcal{N}(400, \sigma^2)$ telle que $\mathbb{P}(X \geq 385)$, alors :

$$\mathbb{P}(X \geq 385) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 400}{\sigma} \geq \frac{385 - 400}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{-15}{\sigma}\right)$$

où Z suit $\mathcal{N}(0, 1)$. On cherche ainsi σ tel que : $\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-15}{\sigma}\right) \simeq 0,040$, on en déduit que :

$$-\frac{15}{\sigma} \simeq -1,751 \quad \text{et finalement : } \sigma \simeq 8,567$$

Partie B.

- $p = 0,96$ et $n = 300$, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est donné par :

$$\left[0,96 - 1,96 \frac{\sqrt{0,96(1-0,96)}}{\sqrt{300}} ; 0,96 + 1,96 \frac{\sqrt{0,96(1-0,96)}}{\sqrt{300}} \right]$$

Ce qui donne :

$$[0,938 ; 0,982]$$

- Pour l'échantillon, la fréquence observée est $f = \frac{283}{300} \simeq 0,943$ qui appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique. En considérant cet échantillon, l'objectif est atteint.

Partie C.

- $\mathbb{P}(T \geq 30) = 1 - \mathbb{P}(0 \leq T \leq 30) = 1 - \int_0^{30} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-30\lambda}$. On doit donc résoudre :

$$e^{-30\lambda} = 0,913$$

$$\text{On a donc : } \lambda = \frac{\ln(0,913)}{-30} \simeq 0,003.$$

2. On utilise la propriété de la loi exponentielle (durée de vie sans vieillissement) :

$$\mathbb{P}_{(T \geq 60)}(T \geq 90) = \mathbb{P}_{(T \geq 60)}(T \geq 60 + 30) = \mathbb{P}(T \geq 30) = 0,913$$

3. On résout $\mathbb{P}(T \geq x) = 0,5$:

$$\mathbb{P}(T \geq x) = e^{-0,003x} = 0,5 \implies x = \frac{\ln(0,5)}{-0,003} \simeq 231 \text{ jours}$$

Exercice 4

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \times \frac{\ln(x^2)}{x^2}$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(c) L'axe des ordonnées est une asymptote verticale et l'axe des abscisses, une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

2. (a) f dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$$

(b) $-1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < -1/2 \Leftrightarrow x < e^{-1/2}$ donc $f'(x) > 0$ sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right[$.

(c) On en déduit le tableau de variation :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$		$\begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array}$	
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{e}{2}$	0

3. (a) On doit résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$\frac{1 + \ln x}{x^2} = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff x = e^{-1}$$

L'unique point d'intersection est $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

(b) $f(x) \leq 0$ pour $x \in]0, 1/e]$ et $f(x) \geq 0$ pour $x \in [1/e, +\infty[$.

4. (a) $f(x) \leq e/2$ pour tout $x \in [1/e, 2]$ donc par positivité de l'intégrale :

$$I_2 = \int_{1/e}^2 f(x) dx \leq \left(2 - \frac{1}{e}\right) \times \frac{e}{2} \leq e - \frac{1}{2}$$

$$(b) \quad I_n = \int_{1/e}^n f(x) dx = \left[\frac{-2 - \ln x}{x} \right]_{1/e}^n = \frac{-2 - \ln n}{n} + e.$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e.$$