Kit de survie - Bac ES

1. Étude du signe d'une expression

a) Signe de $ax+b$ $(a \neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax+b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

b) Signe de ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

On calcule la discriminant $\Delta = b^2-4ac$ (sauf cas évidents)
• Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

• Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.
On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

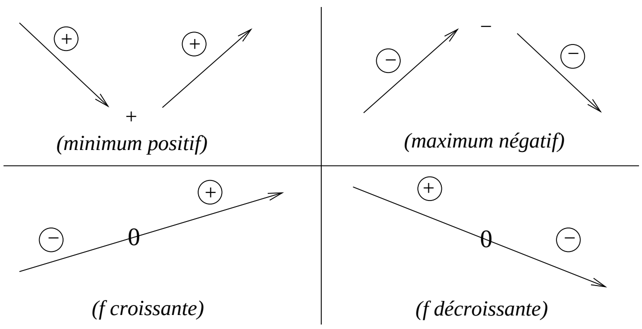
• Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(on suppose que $x_1 < x_2$)

c) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



d) Pour les autres expressions :

Pour étudier le signe d'une expression $A(x)$ (qui n'est pas du premier, ni du second degré et après avoir factorisé au maximum) sur un intervalle I, on résout l'inéquation $A(x) \geqslant 0$ *(on cherche ce qui annule l'expression et où mettre le(s) signe(s) +).*

► *Exemple :* Étude du signe de $(3 - \ln x)$ sur $I =]0; +\infty[$.
$3 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 \geqslant \ln x \Leftrightarrow \ln(e^3) \geqslant x \Leftrightarrow e^3 \geqslant x$.
On en conclut que l'expression s'annule pour $x = e^3$ et qu'il faut mettre le signe + pour $0 < x < e^3$:

x	0		e^3		$+\infty$
$3 - \ln x$	||	$+$	0	$-$	

2. Dérivation

• Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$	$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$	$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

• Opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$k\,f \quad (k$ réel$)$	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g + f\,g'$

Fonction	Fonction dérivée
f^2	$2\,f'\,f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$

3. Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est :
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente est parallèle à une certaine droite d'équation $y = mx + p$, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$. (les coefficients directeurs devant être égaux)

4. Équation $f(x) = k$

• Si f est **continue** et **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur un intervalle I et si k est compris entre les valeurs de f aux bornes de I alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans I.
• Pour déterminer une valeur approchée de x_0, on utilise la méthode du « balayage ».

► *Exemple :* la fonction f définie par $f(x) = x + \ln x$ est continue et strictement croissante sur $I = [1{,}2]$ car f est dérivable et $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$ sur I. De plus 2 est compris entre $f(1) = 1$ et $f(2) \approx 2{,}7$. On peut donc en conclure que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution x_0 dans $[1{,}2]$.
Pour déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près, on balaye l'intervalle avec un pas de 0,1 :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	**1,5**	**1,6**	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	1	1,19	1,38	1,56	1,73	**1,90**	**2,07**				

On a arrêté les calculs après 1,6 car 2 a été « franchi »par $f(x)$.
En effet, d'après le tableau, $f(1{,}5) < 2 < f(1{,}6)$. On peut donc en déduire que : $1{,}5 < x_0 < 1{,}6$.
Conclusion :
1,5 est une valeur approchée de x_0 **par défaut** à 10^{-1} près.
1,6 est une valeur approchée de x_0 **par excès** à 10^{-1} près.

5. Convexité

Définition

Étant donné une fonction f dérivable sur un intervalle I.
• f est dite convexe sur I si sa courbe représentative est entièrement située au dessus de chacune de ses tangentes.
• f est dite concave sur I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

Propriété

Étant donné une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle $]a;b[$.
• Si, pour tout x de $]a;b[$, $f''(x) \geqslant 0$ alors f est convexe sur $]a;b[$.
• Si, pour tout x de $]a;b[$, $f''(x) \leqslant 0$ alors f est concave sur $]a;b[$.
• Si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en un point x_0 de $]a;b[$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion en x_0 (la courbe traverse la tangente en ce point).

6. Logarithme

a) Propriétés

• $\ln x$ n'existe que si $x > 0$

• Si $a > 0$ et $b > 0$:
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln\left(a^\alpha\right) = \alpha \ln a$; $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

• $\ln e = 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln(e^n) = n$ (n entier)

Signe du logarithme : $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$; $\ln x > 0$ si $x > 1$

• $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$

• Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

► *Exemples d'équations et d'inéquations :*
• $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.
Avec cette condition : $\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = \ln(e^5) \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^5}{2}$. $S = \left\{\dfrac{e^5}{2}\right\}$
• $\ln(x+2) \leqslant 1$. Condition d'existence : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
Avec cette condition : $\ln(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow \ln(x+2) \leqslant \ln e \Leftrightarrow x + 2 \leqslant e \Leftrightarrow x \leqslant e - 2$. $S =]-2; e-2]$

b) Dérivées

• $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$

► *Exemple :* $\left(\ln(x^2 + 5x + 1)\right)' = \dfrac{2x+5}{x^2+5x+1}$

7. Exponentielle

a) Propriétés

• $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$; $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

• Pour tout x, $e^x > 0$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$

• Pour tous réels a et b : $e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$; $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

• $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

▶ *Exemples d'équations et d'inéquations :*

• $e^{2x}-2e^{x}-3=0 \Leftrightarrow X^2-2X-3=0$ avec $X=e^x$.
$\Delta=16$; $X=-1$ ou $X=3$. D'où, $e^x=-1$ (impossible) ou $e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 3$. $S=\{\ln 3\}$

• $e^x<5e^{-x} \Leftrightarrow e^x<\dfrac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x}<5$ (car $e^x>0$) $\Leftrightarrow 2x<\ln 5 \Leftrightarrow x<\dfrac{\ln 5}{2}$. $S=\left]-\infty;\dfrac{\ln 5}{2}\right[$.

b) Dérivées

• $(e^x)'=e^x$; $(e^u)'=u'e^u$

▶ *Exemples :* $(e^{-x})'=-e^{-x}$; $\left(e^{x^2+1}\right)'=2x\,e^{x^2+1}$

8. Puissances

• Pour tous réels a et b avec $a>0$: $a^b=e^{b\ln a}$; $\ln a^b=b\ln a$
• Pour tout réel $a>0$ et pour tout entier $n>1$: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$; $(\sqrt[n]{a})^n=a$

▶ *Exemples :*

• $2^x=5 \Leftrightarrow \ln(2^x)=\ln 5 \Leftrightarrow x\ln 2=\ln 5 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 5}{\ln 2}$

• Pour tout x, $(3^x)'=\left(e^{x\ln 3}\right)'=\ln 3\times e^{x\ln 3}=\ln 3\times 3^x$.

9. Primitives

• F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x)=f(x)$.
• Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x)=F_0(x)+C$ où C est une constante réelle.
• Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

• **Primitives des fonctions usuelles :** *(F représente une primitive de f)*

$f(x)=a \Rightarrow F(x)=ax$	$f(x)=x \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^2}{2}$
$f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^3}{3}$	$f(x)=x^3 \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}$
$f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow F(x)=\ln x$	$f(x)=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^3} \Rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{2x^2}$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x)=2\sqrt{x}$
$f(x)=e^x \Rightarrow F(x)=e^x$	

• **Formules générales :**

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\dfrac{U^2}{2}$	$f(x)=\dfrac{1}{x}\times\ln x \Rightarrow F(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{2}$
$U'U^2$	$\dfrac{U^3}{3}$	$f(x)=4(4x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\dfrac{(4x+1)^3}{3}$
$U'U^3$	$\dfrac{U^4}{4}$	$f(x)=2x(x^2+1)^3 \Rightarrow F(x)=\dfrac{(x^2+1)^4}{4}$
$\dfrac{U'}{U^2}$ $(U(x)\neq 0)$	$\dfrac{-1}{U}$	$f(x)=\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow F(x)=\dfrac{-1}{x^3+1}$
$\dfrac{U'}{U^3}$ $(U(x)\neq 0)$	$\dfrac{-1}{2U^2}$	$f(x)=\dfrac{7}{(7x+1)^3} \Rightarrow F(x)=\dfrac{-1}{2(7x+1)^2}$
$\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ $(U(x)>0)$	$2\sqrt{U}$	$f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}} \Rightarrow F(x)=2\sqrt{3x+2}$
$U'e^U$	e^U	$f(x)=4e^{4x+5} \Rightarrow F(x)=e^{4x+5}$

• **Recherche pratique d'une primitive :**
Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.
Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple :*
Soit f définie par $f(x)=e^{3x+4}$. On pense à la forme $U'e^U$ (dont une primitive est e^U) .
On écrit que $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\underbrace{3\,e^{3x+4}}_{\text{forme exacte}}$ Une primitive de f est donc F définie par $F(x)=\dfrac{1}{3}e^{3x+4}$.

10. Calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :
• Pour tous a et b de I, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

► *Exemple :* $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\times\ln x\,dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{1}{2}$.

Propriétés de l'intégrale :
Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :
• $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$.
• $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$ *(Relation de Chasles)*
• $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Pour tout réel k, $\displaystyle\int_a^b (kf)(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$
• Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0$
• Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
Si f est continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Calculs d'aires
f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.
• Si pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b g(x)-f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.
(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)
• Si pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.
• Si pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\leqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\displaystyle-\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

▶ *Remarques :*

• Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) × (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).

• Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord étudier leur position relative sur l'intervalle en question.

11. Probabilités

a) Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

• L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.

• Un événement A est une partie de l'univers.

• Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.

• L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.

• L'événement $A \cap B$ (noté aussi « A et B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.

• L'événement $A \cup B$ (noté aussi « A ou B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.

• Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

• Si $\Omega = \{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ et si à chaque résultat possible e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que $0 \leqslant p(e_i) \leqslant 1$ et $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.

• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

• $p(\varnothing) = 0$; $\quad p(\Omega) = 1$

• $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$; $\quad p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$; $\quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
(si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)

• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p(A) = \dfrac{\text{nb d'éléments de A}}{\text{nb d'éléments de }\Omega} = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$

▶ *Exemple :* Tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes avec les événements :

$p(\text{la carte tirée est un roi }) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad$ $p(\text{la carte tirée est un coeur }) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$

$p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{et}} \text{ un cœur }) = \dfrac{1}{32}$ $\qquad$ $p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{ou}} \text{ un cœur }) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$

b) Probabilités conditionnelles

Définition

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω :

• On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Propriété

Pour tous événements non vides A et B :

• $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $\quad p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$

• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour } A \cap B}{\text{nb de cas favorables pour A}}$

• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

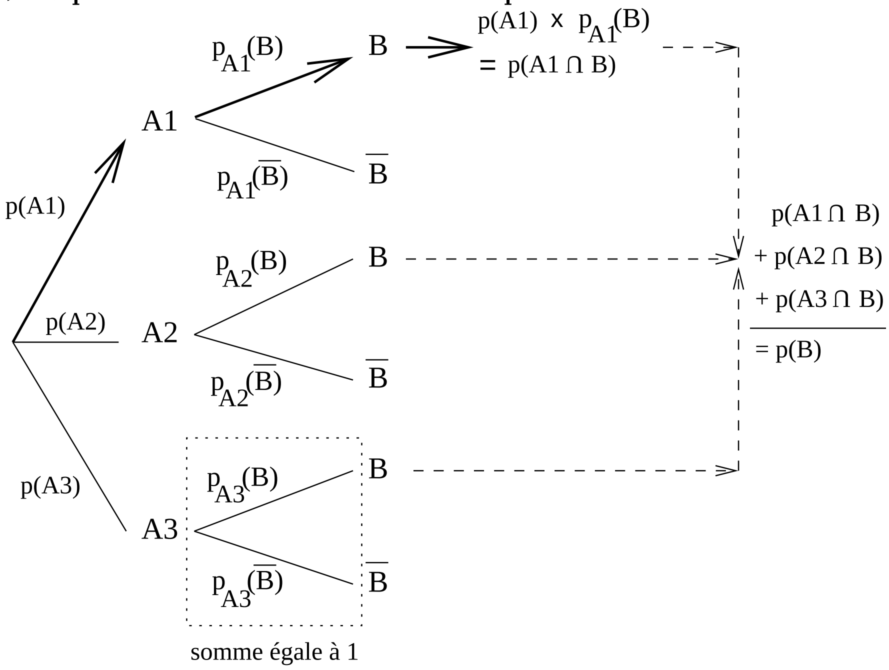
Propriété

Formule des probabilités totales

Si A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :

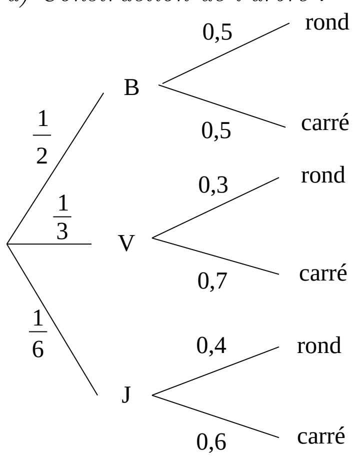
• $p(B) = p\left(A_1 \cap B\right) + \cdots + p\left(A_n \cap B\right) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

► **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**



► **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**
• Sur les premières branches, on inscrit les $p\left(A_i\right)$.
• Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
• La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

► *Exemple :* Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.
a) Construction de l'arbre :



b) Sachant que le jeton tiré est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?
La lecture directe de l'arbre nous donne que $p_B(C) = 0{,}5$.
c) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?
$p(R) = \frac{1}{2} \times 0{,}5 + \frac{1}{3} \times 0{,}3 + \frac{1}{6} \times 0{,}4 = \frac{5}{12}$.
d) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?
$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0{,}5}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$.

c) Indépendance en probabilité

Définition
• Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
• Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

d) Loi numérique associée à une expérience aléatoire

On considère une expérience aléatoire où à chaque résultat possible on peut associer un réel X. On note x_i les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X prenne la valeur x_i .
• Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.
• Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
• Variance de X : $V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i)^2\right) - \big(E(x)\big)^2 = p_1(x_1)^2 + \cdots + p_n(x_n)^2 - \big(E(x)\big)^2$
• Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$

► *Exemple :* On lance un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il obtient un « 1 » ou un « 6 » et il perd 2 euros dans le cas contraire. Soit X le gain du joueur.
Loi de probabilité de X : X ne peut prendre que les valeurs -2 et 6.
On a $p(X = -2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $p(X = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

x_i	-2	6
p_i *(la somme doit être égale à 1)*	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} \times 6 = \frac{2}{3}$; $V(X) = \frac{2}{3} \times (-2)^2 + \frac{1}{3} \times (6)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{128}{9}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{128}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

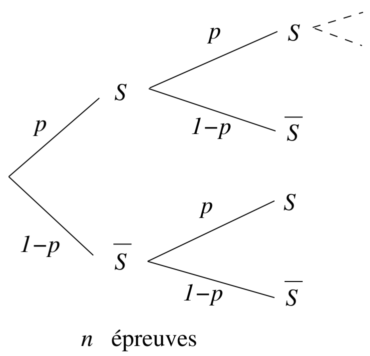
e) Loi binomiale

Définition
• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer le dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .
Par contre, si on s'intéresse ensemble aux six événements « obtenir le chiffre n« $(1 \leqslant n \leqslant 6)$, ce n'est plus une épreuve de Bernoulli.

► **Remarques :**
• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès«) et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$).
• Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un *schéma* de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre), que le « succès« a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des *épreuves* de Bernoulli successives.

Propriété



Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.
Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.
• **Probabilité d'obtenir k succès** : $p(X = k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$
(k entier tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$)
• **Espérance de X** : $E(X) = np$

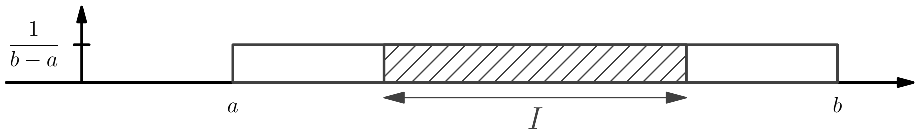
► *Exemple :*
Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\frac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».
X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{6}$.
La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3}\ \left(\frac{1}{6}\right)^3\ \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$
La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$
L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np = \frac{7}{6}$.

f) Loi uniforme

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.

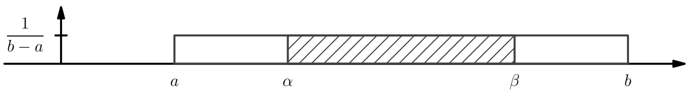


On peut considérer que $p\,(X \in I) = \displaystyle\int_{x \in I} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$. (« aire sous la courbe »)

Propriété

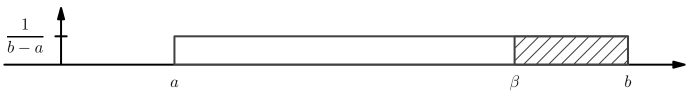
• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[a\,;\,b]$, on a :

$p\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}$



$p\,(X \leqslant \alpha) = p\,(a \leqslant X \leqslant \alpha) = \dfrac{\alpha - a}{b-a}$

$p\,(X \geqslant \beta) = p\,(\beta \leqslant X \leqslant b) = \dfrac{b-\beta}{b-a}$



$p\,(X = \alpha) = 0$

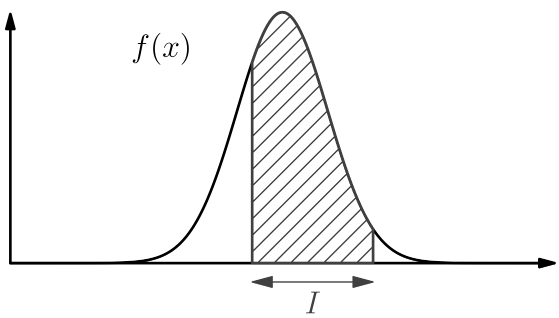
(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

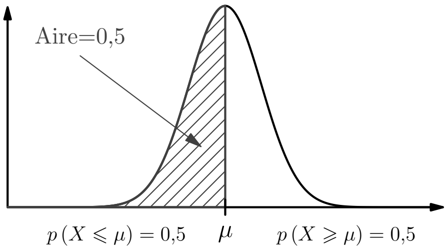
g) Loi normale

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ** lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0,5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



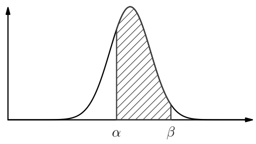
► **Remarque :** L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ. On a donc la situation suivante :



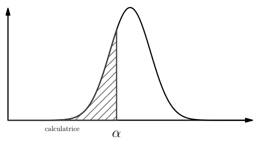
Propriété

• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ** alors pour tous réels α et β, on a :

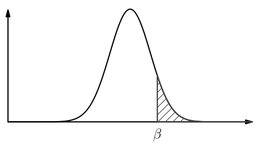
$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) =$
TI : DISTR (2nd+VARS) ; `normalcdf` (α,β,μ,σ)
CASIO : Menu STAT ; DIST ; NORM ; NCD avec
Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \leqslant \alpha) =$
TI : `normalcdf` (-10^{99},α,μ,σ)
CASIO : NCD avec
Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \geqslant \beta) =$
TI : `normalcdf` (β,10^{99},μ,σ)
CASIO : NCD avec
Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables :**
$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}68$; $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}95$; $p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

► *Exemple 1:* (pour tester sa calculatrice)
Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :
$p(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0{,}682689$; $p(X \leqslant 55) \approx 0{,}308538$; $p(X \geqslant 62) \approx 0{,}252493$

► *Exemple 2:* Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.
$p(11{,}9 \leqslant X \leqslant 12{,}2) \approx 0{,}888$, donc 88,8% des tubes sont acceptés par le client.

► *Exemple 3:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0{,}067$ et $p(X < 3) = 0{,}159$. On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 0{,}933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0{,}092$.

12. Échantillonnage

a) Intervalle de fluctuation à 95%

Propriété

Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population alors il y a 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion f du caractère au sein de cet échantillon appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation à 95%** de l'échantillon associé à la proportion p.

b) Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation

Propriété

Étant donné une population dans laquelle **on suppose que la proportion d'un certain caractère est** p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la **fréquence réelle observée** f du caractère dans cet échantillon **est comprise dans l'intervalle de fluctuation** alors on dit qu'**on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien** p (dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

► *Exemple :* Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question. L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est $[0{,}476\,;0{,}564]$ car $0{,}52 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}52\times 0{,}48}{500}} \approx 0{,}476$ et $0{,}52 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}52\times 0{,}48}{500}} \approx 0{,}564$.
0,47 étant en dehors de l'intervalle de fluctuation, on peut rejeter au seuil de 95% l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

c) Estimation par un intervalle de confiance

Propriété

On cherche à connaitre une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** associé à la proportion f.

► *Exemple :* Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est $[14{,}8\%\,;21{,}2\%]$ car $0{,}18 - \dfrac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}148$ et $0{,}18 + \dfrac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}212$.

13. Suites

a) Suites arithmétiques

On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre r appelé raison de la suite.
- Pour tout n : $U_{n+1} = U_n + r$; $U_n = U_0 + nr$; $U_n = U_p + (n-p)r$
- Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$; $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$.

b) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.
- Pour tout n : $U_{n+1} = q \times U_n$; $U_n = q^n \times U_0$; $U_n = q^{n-p} \times U_p$
- Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
- $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{1er terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$ (pour $q \neq 1$)

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = 2555$. *(attention : le nb de termes est égal à 9 pas à 8 !)*

c) Limite de q^n avec $q > 0$

- si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

► *Exemples :*

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

d) Suites arithmético-géométriques : $U_{n+1} = aU_n + b$

► *Exemple :*

Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{4} + 3$.

a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.

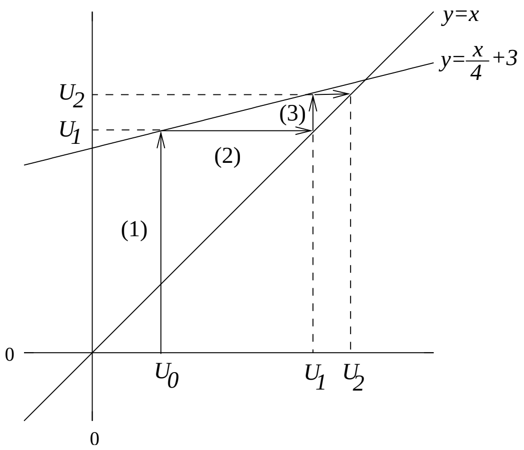
On trace d'abord la droite d'équation $y = \dfrac{x}{4} + 3$ et la droite d'équation $y = x$.

On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique*] .

Pour déterminer $U_2 = f(U_1)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation $y = x$.

Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].

Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses...



b) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 4$ est géométrique.

Pour tout n, $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} - 4}{U_n - 4} = \dfrac{\frac{U_n}{4} + 3 - 4}{U_n - 4} = \dfrac{\frac{U_n}{4} - 1}{U_n - 4} = \dfrac{\frac{1}{4}(U_n - 4)}{U_n - 4} = \dfrac{1}{4}$.

(V_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

c) En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n.

Pour tout n, $V_n = q^n \times V_0 = -3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ (car $V_0 = U_0 - 4 = 1 - 4 = -3$).

$V_n = U_n - 4 \Leftrightarrow U_n = V_n + 4 = -3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 4$

d) Déterminer la limite de la suite (U_n).

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{-3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}_{\to 0} + 4 = 4$ (car $0 < \frac{1}{4} < 1$).

e) Déterminer l'expression de $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

$S_n = V_0 + 4 + V_1 + 4 + \cdots + V_n + 4 = V_0 + V_1 + \cdots + V_n + 4(n+1)$.

Or (V_n) est géométrique, donc, $V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = -3 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = -4 \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

D'où, $S_n = -4 \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)$.

14. Pourcentages

Prendre x % d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

▶ *Exemple :* 5 % de 640 = $\frac{5}{100} \times 640 = 32$

La proportion en pourcentage d'une partie A par rapport à un total B est égale à : $\frac{A}{B} \times 100$ (en %).

▶ *Exemple :* La proportion en pourcentage de 18 par rapport à 120 est égale à 15%, car $\frac{18}{120} \times 100 = 15$.

Augmenter une grandeur de x % revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$.
Diminuer une grandeur de x % revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$.

▶ *Exemples :*
- augmenter une valeur de 20 % revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1{,}2$.
- le prix d'un produit valant 15 euros après une baisse de 6 % est égal à $\left(1 - \frac{6}{100}\right) \times 15 = 0{,}94 \times 15 = 14{,}1$ euros.
- Diminuer une grandeur de 15 %, puis l'augmenter de 20 % revient à la multiplier par : $\left(1 - \frac{15}{100}\right) \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 0{,}85 \times 1{,}2 = 1{,}02$.

(Rappel : les pourcentages ne s'ajoutent pas lors d'évolutions successives)

▶ *Remarque :*
- Si on augmente chaque année une valeur de x % , on utilise une suite géométrique de raison $1 + \frac{x}{100}$.
- Si on diminue chaque année une valeur de x % , on utilise une suite géométrique de raison $1 - \frac{x}{100}$.

$$\text{Variation d'une grandeur en pourcentage} = \frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100 .$$

▶ *Exemple :* Un produit passant de 64 à 72 euros subit une hausse de 12,5%, car $\frac{72-64}{64} \times 100 = 12{,}5$.