Kit de survie - Bac S

1. Inégalités - Étude du signe d'une expression

a) Opérations sur les inégalités

Règles usuelles :

Pour tout a	$x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$	*même sens*
Pour tout $k > 0$:	$x < y \Rightarrow kx < ky$	*même sens*
Pour tout $k < 0$:	$x < y \Rightarrow kx > ky$	*sens contraire*
Pour x et y de même signe :	$x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$	*sens contraire*
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow x^2 < y^2$	*même sens*
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$	*même sens*
Si f croissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$	*même sens*
Si f décroissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$	*sens contraire*

(* sur un intervalle contenant x et y)

► *Exemples :*

• Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$?

$3 < x < 5 \Rightarrow -5 < -x < -3 \Rightarrow -2 < 3 - x < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3-x} < -\dfrac{1}{2}$

• Comment montrer que pour tout $x > 1$, $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$?

Pour tout $x > 1$:

$0 < x^2 - 1 < x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-1} < x$ (car $x > 0$) $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{1}{x}$

Rappels :

• On peut toujours **ajouter** membre à membre deux inégalités.

• On peut **multiplier** membre à membre deux inégalités si tous les termes sont **positifs**.

• **On ne peut pas soustraire ou diviser membre à membre deux inégalités.**

Encadrement de $x - y$:

• On détermine d'abord un encadrement de $-y$, puis on effectue la somme membre à membre avec celui de x.

► *Exemple :* $\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ 1 < -y < 4 \end{cases} \Rightarrow -1 < x - y < 7.$

Encadrement de $\dfrac{x}{y}$: (les bornes de l'encadrement de x étant de même signe - idem pour y)

• On détermine d'abord un encadrement de $\dfrac{1}{y}$, puis il faut s'arranger pour multiplier membre à membre deux encadrements dont tous les termes sont **positifs**.

► *Exemple 1 :* $\begin{cases} 8 < x < 9 \\ 3 < y < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 < x < 9 \\ \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 < \dfrac{x}{y} < 3.$

► *Exemple 2 :* $\begin{cases} -2 < x < -1 \\ 2 < y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < -x < 2 \\ \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{-x}{y} < 1 \Rightarrow -1 < \dfrac{x}{y} < -\dfrac{1}{3}.$

Méthode importante à connaître : (valable pour les fonctions et les suites)
• Pour montrer que $A < B$, il est dans certains cas plus facile de calculer $A - B$, puis en étudiant son signe de montrer que $A - B < 0$.
► *Exemple :* Comment montrer que si $x < 1$ alors $\dfrac{x-8}{2x-9} < 1$?

Pour tout $x < 1$, $\dfrac{x-8}{2x-9} - 1 = \dfrac{\overbrace{(1-x)}^{+}}{\underbrace{(2x-9)}_{-}} < 0$ (car $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 2x-9 < -7 \end{cases}$)

b) Inégalités classiques

Pour tout x : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

c) Signe de $ax + b$ $(a \neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

d) Signe de $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)
• Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

• Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.
On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

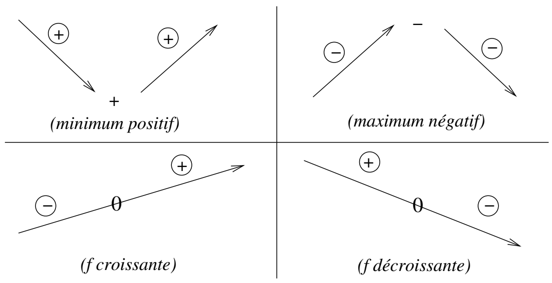
• Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(on suppose que $x_1 < x_2$)

e) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



2. Étude de fonction

a) Parité - Périodicité

• f est paire si D_f est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. La courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
• f est impaire si D_f est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$. La courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine.
• une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T si $f(x+T) = f(x)$ pour tout x. La courbe dans un repère orthogonal est invariante par la translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$.

b) Axe et centre de symétrie

• C_f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie dans un repère orthogonal si pour tout h tel que $a \pm h \in D_f$, $f(a+h) = f(a-h)$.
• C_f admet le point $\Omega\,(a,b)$ comme centre de symétrie dans un repère orthogonal si pour tout h tel que $a \pm h \in D_f$, $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.

c) Limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\quad)}_{\to l} + \underbrace{(\quad)}_{\to l'} \to l + l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l} + \underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l} + \underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to -\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\quad)}_{\to l} \times \underbrace{(\quad)}_{\to l'} \to l \times l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l>0} \times \underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l<0} \times \underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\to l>0} \times \underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to -\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l<0} \times \underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to +\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to -\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to l\neq 0}}\right) \to \frac{1}{l}$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to \pm\infty}}\right) \to 0$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to 0^+}}\right) \to +\infty$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to 0^-}}\right) \to -\infty$

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\dfrac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad) \times \dfrac{1}{(\quad)}$

• **Formes indéterminées :**

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\ \ )}_{\to+\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to-\infty}$; $\underbrace{(\ \ )}_{\to\pm\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to 0}$

• **Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:**

• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur *(ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite).*

d) Asymptotes

• Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à C_f.
• Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ alors la droite d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.
• Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à C_f en $\pm\infty$.
• Si $f(x)=ax+b+g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à C_f en $\pm\infty$.
• De façon générale, si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-g(x)=0$ alors les courbes C_f et C_g sont asymptotes.

• Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g, on étudie le signe de $f(x)-g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales et obliques) :
- si $f(x)-g(x)\geqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située au dessus de C_g sur I.
- si $f(x)-g(x)\leqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située en dessous de C_g sur I.

e) Dérivation

• **Dérivabilité :**

• f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est égale à un réel.
• si la limite n'existe que pour $x>a$, f n'est dérivable qu'à droite.
• si la limite n'existe que pour $x<a$, f n'est dérivable qu'à gauche.

• **Dérivées des fonctions usuelles :**

$f(x)=a\Rightarrow f'(x)=0$	$f(x)=ax+b\Rightarrow f'(x)=a$	$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$
$f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$	$f(x)=x^3\Rightarrow f'(x)=3x^2$	$f(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$	$f(x)=\dfrac{1}{x^3}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{3}{x^4}$	$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

• **Opérations sur les fonctions dérivables :**

Fonction	Fonction dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$k\,f\quad(k$ réel$)$	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g+f\,g'$

Fonction	Fonction dérivée
f^2	$2\,f'\,f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g-f\,g'}{g^2}$

f) Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ (le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente est parallèle à une certaine droite d'équation $y=mx+p$, il suffit de résoudre l'équation $f'(x)=m$. (les coefficients directeurs devant être égaux)

g) Continuité

- f est continue en un point a d'un intervalle $I \subset D_f$ si f admet une limite en a et si $\lim\limits_{x\to a} = f(a)$.
- Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

h) Théorème de la valeur intermédiaire - Équation $f(x) = k$

Si f est **continue** et **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur un intervalle I et si k est compris entre les valeurs de f aux bornes de I alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans I.

► *Exemple :* la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $I = [1,2]$ car f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur I.
De plus 5 est compris entre $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$. On peut donc en conclure que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution x_0 dans $[1,2]$.
Recherche une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	**1,5**	**1,6**	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	2	2,43	2,93	3,50	4,14	**4,87**	**5,70**				

On a arrêté les calculs après 1,6 car $f(1{,}5) < 5 < f(1{,}6)$. On peut donc en déduire que : $1{,}5 < x_0 < 1{,}6$. Une valeur approchée de x_0 **par défaut** à 10^{-1} près est 1,5 et une valeur approchée de x_0 **par excès** à 10^{-1} près est 1,6.

3. Primitives

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
- Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

• **Primitives des fonctions usuelles :** *(F représente une primitive de f)*

$f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax$	$f(x) = x \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^3}{3}$	$f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$	
$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$	$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$

• **Formules générales :**

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\dfrac{U^2}{2}$	$f(x) = \dfrac{1}{x} \times \ln x \Rightarrow F(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$
$U'U^2$	$\dfrac{U^3}{3}$	$f(x) = 4(4x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(4x+1)^3}{3}$
$U'U^3$	$\dfrac{U^4}{4}$	$f(x) = 2x(x^2+1)^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(x^2+1)^4}{4}$
$\dfrac{U'}{U^2}$ $(U(x) \neq 0))$	$\dfrac{-1}{U}$	$f(x) = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{x^3+1}$
$\dfrac{U'}{U^3}$ $(U(x) \neq 0))$	$\dfrac{-1}{2U^2}$	$f(x) = \dfrac{7}{(7x+1)^3} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{2(7x+1)^2}$
$\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ $(U(x) > 0)$	$2\sqrt{U}$	$f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{3x+2}$
$U'\sin U$	$-\cos U$	$f(x) = 2x\sin(x^2+1) \Rightarrow F(x) = -\cos(x^2+1)$
$U'\cos U$	$\sin U$	$f(x) = 4\cos(4x+5) \Rightarrow F(x) = \sin(4x+5)$

• **Recherche pratique d'une primitive :**
Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.
Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple :* Soit f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{(3x+6)^2}$.

On pense à la forme $\dfrac{U'}{U^2}$ (dont une primitive est $\dfrac{-1}{U}$) . On écrit que $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\underbrace{\dfrac{3}{(3x+6)^2}}_{\text{forme exacte}}$.

Une primitive de f sur $]-2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-1}{(3x+6)}$.

4. Fonctions logarithme népérien et exponentielle

a) Existence

• $\ln x$ n'existe que si $x>0$.
• e^x existe pour tout réel x.

► *Exemple :*
La fonction f définie par $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$ n'est définie que sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$ car il faut que x^2-1 soit strictement positif.

b) Lien entre $\ln x$ et e^x

• $y=e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
• $\ln\left(\mathrm{e}^x\right)=x$; $\mathrm{e}^{\ln x}=x$ (pour $x>0$)

c) Valeurs particulières

• $\ln 1=0$; $\ln \mathrm{e}=1$
• $\mathrm{e}^0=1$; $\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$; $\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

d) Propriétés algébriques

Si $a>0$ et $b>0$:
$\ln(ab)=\ln a+\ln b$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$; $\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$

Pour tous réels a et b :
$\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b=\mathrm{e}^{a+b}$; $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a}=\mathrm{e}^{-a}$; $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}=\mathrm{e}^{a-b}$
Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\left(\mathrm{e}^a\right)^n=\mathrm{e}^{an}$

► *Exemples :*
Si $x>0$, $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=-\ln(x^2)=-2\ln x$
Pour tout x, $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2\times\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{-2x}\times\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^x$

e) Signe de $\ln x$ et de e^x

• Signe de $\ln x$:
Si $0<x<1$ alors $\ln x$ est strictement négatif ; Si $x>1$ alors $\ln x$ est strictement positif ; $\ln 1=0$.
• Signe de e^x : pour tout réel x, e^x est strictement positif.

f) Équations et inéquations

• Si $a>0$ et $b>0$:
$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a=b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a<b$; $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$

• $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a=b$; $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a<b$; $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

• $\ln x = a \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^a$; $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < \mathrm{e}^a$; $\ln x > a \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^a$

• Si $a>0$: $\mathrm{e}^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$; $\mathrm{e}^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$; $\mathrm{e}^x > a \Leftrightarrow x > \ln a$

► *Remarque :*
Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

► *Exemples d'équations et d'inéquations :*

• $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x>0$.
Avec cette condition :
$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = \mathrm{e}^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\mathrm{e}^5}{2}$. $S = \left\{\dfrac{\mathrm{e}^5}{2}\right\}$

• $\ln(x+2) \leqslant 1$. Condition d'existence : $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.
Avec cette condition :
$\ln(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow x+2 \leqslant \mathrm{e} \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}-2$. $S =]-2;\mathrm{e}-2]$

• $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = \mathrm{e}^x$.
$\Delta = 16$; $X=-1$ ou $X=3$.
D'où, $\mathrm{e}^x = -1$ (impossible) ou $\mathrm{e}^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$

• $\mathrm{e}^x < 5\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < \dfrac{5}{\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} < 5$ (car $\mathrm{e}^x > 0$) $\Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 5}{2}$. $S = \left]-\infty;\dfrac{\ln 5}{2}\right[$.

g) Limites

Situation en $+\infty$:
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
• Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty$
(on dit que x^n est plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
• Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$
(on dit que e^x est plus fort que x^n en $+\infty$: on en déduit que e^x est aussi plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

Méthode générale en cas de FI en $+\infty$: Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.
► *Exemples :*

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^x - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(3 - \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + \ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \times \dfrac{\left(1 + \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = 0$ (le plus fort est en bas)

Situation en 0 :
• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$
• Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \times \ln x = 0$

Méthode générale en cas de FI en 0 avec un logarithme : on essaie de faire apparaître $x^n \times \ln x$.
▶ *Exemple :*
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} + \ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$

Situation en $-\infty$:
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n \times \mathrm{e}^x = 0$

Méthode générale en cas de FI en $-\infty$ avec un exponentiel : on essaie de faire apparaître $x^n \times e^x$.
▶ *Exemple :* $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2\mathrm{e}^x + e^x = 0$ car $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

• Autres limites : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

h) Dérivées et primitives

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$; $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

▶ *Exemples :*
$\left[\ln(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $[\mathrm{e}^{-x}]' = -\mathrm{e}^{-x}$

- Si $U > 0$, une primitive de $\dfrac{U'}{U}$ est $\ln U$; Si $U < 0$, une primitive de $\dfrac{U'}{U}$ est $\ln(-U)$.
- Une primitive de $u'\mathrm{e}^U$ est e^U.

▶ *Exemples :*
• Soit f définie sur $]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4x-8}$. On écrit que $f(x) = \dfrac{1}{4} \times \underbrace{\dfrac{4}{4x-8}}_{\text{forme exacte}}$.
Une primitive de f sur $]2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(4x-8)$ car $4x-8$ reste strictement positif sur $]2\,;\,+\infty[$.
• Si $f(x) = e^{-x} = -\left(-e^{-x}\right)$ alors une primitive de f est définie par $F(x) = -e^{-x}$.
• Si $f(x) = e^{4x+5} = \dfrac{1}{4}\left(4e^{4x+5}\right)$ alors une primitive de f est définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x+5}$.

5. Intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :
- Pour tous a et b de I, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.
- Pour tout a de I, la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule pour $x = a$.

▶ *Exemple :* $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$.

Propriétés de l'intégrale :
Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ *(Relation de Chasles)*

- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité de l'intégrale)*
- Pour tout réel k, $\displaystyle\int_a^b (kf)(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité de l'intégrale)*
- Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$
- Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- Si $a \leqslant b$ et si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$ (inégalité de la moyenne)

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Si f est continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Calculs d'aires

f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.

- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$ en **unités d'aire**.

(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)

- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en **unités d'aire**.
- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en **unités d'aire**.

► *Remarques :*

- Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses et par la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées.
- Pour déterminer l'aire entre une courbe et l'axe des abscisses, il faut d'abord étudier le signe de la fonction sur l'intervalle en question.
- Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord étudier leur position relative sur l'intervalle en question.

6. Suites numériques

a) Raisonnement par récurrence

Principe général : Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$:

- on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0.
- on suppose la propriété vraie au rang p *(en traduisant ce que cela signifie)* et on montre **qu'alors** la propriété est vraie au rang $p+1$.
- on conclut en disant que la propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

► *Exemple :*

Montrons par récurrence que la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$ est positive et majorée par 2 :

- $0 \leqslant U_0 \leqslant 2$. La propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $0 \leqslant U_p \leqslant 2$.

On a alors : $2 \leqslant 2 + U_p \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2+U_p} \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant U_{p+1} \leqslant 2$.

La propriété est alors vraie au rang $p+1$, elle est donc vraie pour tout n.

b) Comment étudier le sens de variation d'une suite ?

- **Méthode 1** : on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.
  - Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n$ reste toujours positif alors la suite est croissante.
  - Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n$ reste toujours négatif alors la suite est décroissante.

  ▶ *Exemple* : Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + 2n$.
  Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = 2n \geqslant 0$. (U_n) est donc croissante.

- **Méthode 2** (uniquement pour les suites dont tous les termes sont strictement positifs) : on compare $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.
  - Si pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ reste supérieur à 1 alors la suite est croissante.
  - Si pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ reste inférieur à 1 alors la suite est décroissante.

  ▶ *Exemple* : Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 3^n$.
  Pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 3 \geqslant 1$. (U_n) est donc croissante.

- **Méthode 3** (pour les suites explicites définies par $U_n = f(n)$) : on utilise les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
  - Si f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite est croissante.
  - Si f est décroissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite est décroissante.

  ▶ *Exemple* : Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}$.
  On a $U_n = f(n)$ avec f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}$.
  Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} < 0$. f est décroissante sur $[0;+\infty[$, donc (U_n) est décroissante.

- **Méthode 4** : à l'aide d'un raisonnement par récurrence
  - Si on montre par récurrence que pour tout n, $U_{n+1} \geqslant U_n$ alors la suite est croissante.
  - Si on montre par récurrence que pour tout n, $U_{n+1} \leqslant U_n$ alors la suite est décroissante.

  ▶ *Exemple* : Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \mathrm{e}$ et $U_{n+1} = \ln(U_n)$.
  Montrons par récurrence que (U_n) est décroissante, c'est à dire que pour tout n, $U_{n+1} \leqslant U_n$: Au rang $n = 0$: $U_1 = 1$. On a bien $U_1 \leqslant U_0$.
  On suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $U_{p+1} \leqslant U_p$. La fonction ln étant croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a alors $\ln(U_{p+1}) \leqslant \ln(U_p)$. On en déduit que $U_{p+2} \leqslant U_{p+1}$. La propriété est alors vraie au rang $p+1$, donc elle est vraie pour tout n.

c) Majorant et minorant d'une suite

Une suite (U_n) est majorée par un réel M si, pour tout n, U_n reste inférieur ou égal à M.

Méthodes possibles pour montrer que M est un majorant :

- On peut étudier le signe de $U_n - M$ et montrer que $U_n - M$ est toujours négatif ou nul.
- On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que U_n reste toujours inférieur ou égal à M. *(voir exemple du paragraphe « Raisonnement par récurrence »)*
- Pour les suites explicites définies par $U_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f. Si, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant M$ alors (U_n) sera majorée par M.

Une suite (U_n) est minorée par un réel m si, pour tout n, U_n reste supérieur ou égal à m.

Méthodes possibles pour montrer que m est un minorant :

- On peut étudier le signe de $U_n - m$ et montrer que $U_n - m$ est toujours positif ou nul.
- On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que U_n reste toujours supérieur ou égal à m. *(voir exemple du paragraphe « Raisonnement par récurrence » où l'on montre que la suite est minorée par 0)*
- Pour les suites explicites définies par $U_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f. Si, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant m$ alors (U_n) sera minorée par m.

d) Limites de suite

- Une suite (U_n) est dite **convergente** s'il existe un **réel** l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.
- La suite est dite **divergente** si elle n'admet pas de limite ou si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$
- Les théorèmes sur les opérations avec les limites de fonction restent valables pour les suites.

Pour les suites définies par $U_n = f(n)$: si f admet une limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *(dans la pratique, on peut continuer à utiliser n comme variable)*

► *Exemple :* $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \ln n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

Limite de q^n :
- si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- si $q \leqslant -1$ alors la suite de terme général q^n n'admet pas de limite.

► *Exemples :*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

Théorèmes de comparaison :
- si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \geqslant V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.
- si pour tout $n \geqslant n_0$, $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$ (l réel) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

► *Exemple :* Pour tout $n \geqslant 1$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

e) Convergence des suites croissantes ou décroissantes

- toute suite croissante et majorée par M converge vers un réel l avec $l \leqslant M$.
- toute suite décroissante et minorée par m converge vers un réel l avec $l \geqslant m$.

Détermination de l dans le cas des suites définies par $U_{n+1} = f(U_n)$:
Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \in [a\,;b]$; si f est **continue** sur $[a\,;b]$ et si, pour tout n, $U_n \in [a\,;b]$ alors :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(l) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = f(l) \Rightarrow l = f(l)$

f) Suites arithmétiques

On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre r appelé raison de la suite.
- Pour tout n : $U_{n+1} = U_n + r$; $U_n = U_0 + nr$; $U_n = U_p + (n-p)r$
- Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.
- $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = (n-p+1) \times \dfrac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$
- Si la raison r est positive, la suite est croissante.
- Si la raison r est négative, la suite est décroissante.

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$; $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$. $U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{2+32}{2} = 187$.
La suite est strictement croissante car $a > 0$.

g) Suites géométriques

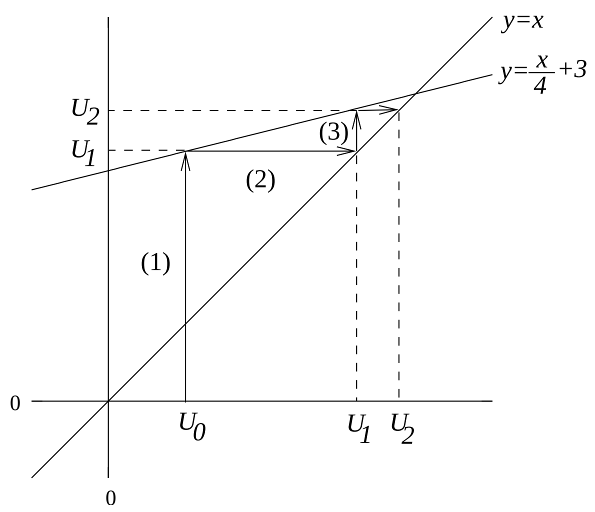
On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.
- Pour tout n : $U_{n+1} = q \times U_n$; $U_n = q^n \times U_0$; $U_n = q^{n-p} \times U_p$
- Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ = constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
- $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = 1\text{er terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$ (pour $q \neq 1$)
- Pour étudier le sens de variation, on calcule $U_{n+1} - U_n$ et on factorise.

(remarque : si $q < 0$ la suite est ni croissante, ni décroissante)

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$. $U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = 2555$.
$U_{n+1} - U_n = 5 \times 2^{n+1} - 5 \times 2^n = 5 \times 2^n \times (2-1) = 5 \times 2^n > 0$. La suite est croissante.

h) Exemple de suite récurrente définie par $U_{n+1} = f(U_n)$

Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{4} + 3$.
a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite :



On trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence (ici on a $f(x) = \dfrac{x}{4} + 3$) et la droite d'équation $y = x$.
On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique*] .
Pour déterminer $U_2 = f(U_1)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation $y = x$.
Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].
Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses... *b) Montrer par récurrence que, pour tout n, $0 \leqslant U_n \leqslant 4$:*
au rang 0 : $0 \leqslant U_0 \leqslant 4$.
on suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $0 \leqslant U_p \leqslant 4$.
On a alors : $0 \leqslant \dfrac{U_p}{4} \leqslant 1 \Rightarrow 3 \leqslant \dfrac{U_p}{4} + 3 \leqslant 4 \Rightarrow 0 \leqslant U_{p+1} \leqslant 4$.
La propriété est alors vraie au rang $p+1$. Elle est donc vraie pour tout n.
c) Montrer que la suite est croissante et conclure sur sa convergence :
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n}{4} + 3 - U_n = \dfrac{3}{4}(4 - U_n) \geqslant 0$ car $U_n \leqslant 4$. La suite est donc croissante et comme elle est majorée, elle converge.
d) Déterminer la limite de la suite :
La suite converge vers un réel l et la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{4} + 3$ est continue sur $[0\,;\,4]$, donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(l) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = f(l) \Rightarrow l = f(l) \Rightarrow l = \dfrac{l}{4} + 3 \Rightarrow l = 4$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$.

7. Complexes

a) Forme algébrique - Calculs dans $\mathbb{C}$

• Tout complexe s'écrit de façon unique sous la forme algébrique $z = a + ib$ (a et b réels) avec $i^2 = -1$.
• a est la partie réelle (notation : $Re(z)$) et b est la partie imaginaire (notation : $Im(z)$).
• $\left\{\begin{array}{c} a+ib = a'+ib' \\ a, b, a', b' \text{ réels} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array}\right.$
• Le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$.
• Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur (s'il n'est pas réel).
• $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ ($z' \neq 0$).

► *Exemples :*
• $\dfrac{2+i}{3+2i} = \dfrac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{6-4i+3i-2i^2}{3^2+2^2} = \dfrac{8-i}{13}$
• Résolution de l'équation $\dfrac{1+iz}{z} = -1+3i$:
Pour $z \neq 0$, on obtient : $1 + iz = (-1+3i)z \Leftrightarrow 1 = (-1+2i)z \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{-1+2i} = \dfrac{-1-2i}{1^2+2^2} = \dfrac{-1-2i}{5}$.
• Résolution de l'équation $(1+i)z = \overline{z} - 2 + 3i$:
En posant $z = x + iy$ (x et y réels), on a :
$(1+i)(x+iy) = x - iy - 2 + 3i \Leftrightarrow (x-y) + i(x+y) = (x-2) + i(-y+3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x - y = x - 2 \\ x + y = -y + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = 2 \end{array}\right.$
D'où, $z = -1 + 2i$.

Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c réels) : $\Delta = b^2 - 4ac$
• Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
• Si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_1 = -\dfrac{b}{2a}$.
• Si $\Delta < 0$, 2 solutions complexes : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

► *Exemple :* $z^2 + z + 1 = 0$
$\Delta = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$. Deux solutions : $z_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

► *Remarque :* On factorise les polynômes dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$.

b) Forme trigonométrique - Module et arguments

Pour $z = a + ib$ (a et b réels) :
• Le module de z est : $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.
• Si $z \neq 0$, tout réel θ tel que $\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{array}\right.$ est un argument de z. On note $arg\, z = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

• Pour tout θ, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
$|e^{i\theta}| = 1$; $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$; $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
• Si un complexe non nul admet r comme module et θ comme argument alors $z = r \cdot e^{i\theta}$ (forme trigonométrique ou forme exponentielle)
• Si $z = r \cdot e^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $arg\, z = \theta + 2k\pi$.
• $r \cdot e^{i\theta} = r' \cdot e^{i\theta'}$ (avec $r > 0$ et $r' > 0$) $\Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$.

▶ *Exemple de passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :*

Soit $z=\sqrt{3}+i$. $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$. $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}$. D'où $z=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

▶ *Exemple de passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :*

$z=4e^{i\frac{\pi}{4}}=4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$.

▶ *Autres exemples classiques d'utilisation de la forme trigonométrique :*

• Calcul de $(1-i)^{12}$. Il est hors de question de faire le calcul sous forme algébrique.
On détermine d'abord la forme trigonométrique de $z=1-i$:

$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \theta=-\dfrac{\pi}{4}$. D'où $z=\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $(1-i)^{12}=z^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\cdot e^{-i\frac{12\pi}{4}}=64\cdot e^{-i3\pi}=64\left(\cos\left(-3\pi\right)+i\sin\left(-3\pi\right)\right)=-64$

• Soit $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2=\sqrt{3}+i$.
Calculer la forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
Réponse : En calculant le module et un argument de z_1 et z_2, on montre que $z_1=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et que $z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
On en déduit que $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Ainsi $\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$. Or, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{4}=\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$.

Donc, $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

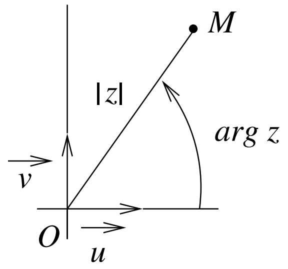
• Résolution de l'équation $z^3=1$:
En posant $z=r\cdot e^{i\theta}$, on doit avoir $r^3\cdot e^{i3\theta}=1\cdot e^{i0} \Leftrightarrow r^3=1$ et $3\theta=2k\pi \Leftrightarrow r=1$ et $\theta=\dfrac{2k\pi}{3}$.
Les trois solutions sont donc :
$1\cdot e^{i0}=1$; $1\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $1\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (en prenant $k=0$, $k=1$ et $k=2$).

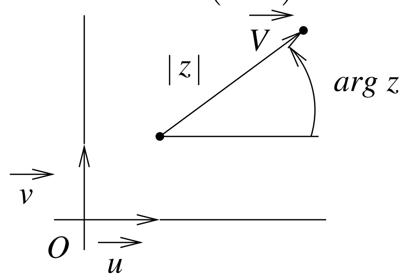
c) Complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

• L'affixe du point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est $z_M=x+iy$.
• L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.
• L'affixe de G le barycentre de (A,a) (B,b) (C,c) est :
$z_G=\dfrac{a\cdot z_A+b\cdot z_B+c\cdot z_C}{a+b+c}$ $(a+b+c\neq 0)$.
• L'affixe du vecteur $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est $z_{\overrightarrow{V}}=x+iy$.
• $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$; $z_{\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}}=z_{\overrightarrow{U}}+z_{\overrightarrow{V}}$; $z_{k\overrightarrow{U}}=k\cdot z_{\overrightarrow{U}}$

• Si M est d'affixe z alors $|z| = OM$ et $arg\ z = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ $(z \neq 0)$.
• Si $\overrightarrow{V}$ est d'affixe z alors $|z| = \|\overrightarrow{V}\|$ et $arg\ z = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{V}\right)$ $(z \neq 0)$.





• $AB = |z_B - z_A|$; $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = arg\ (z_B - z_A)$ (avec $A \neq B$)
• $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = arg\ \left(\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)$ (avec $A \neq B$ et $C \neq D$)

• $(AB)//(CD) \Leftrightarrow arg\ \left(\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ réel
$(A \neq B$ et $C \neq D)$
• $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow arg\ \left(\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ imaginaire pur
$(A \neq B$ et $C \neq D)$

• A, B, C alignés $\Leftrightarrow arg\ \left(\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ réel $(A \neq B$ et $A \neq C)$
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = r$ $(r > 0)$ est le cercle de centre A et de rayon r.
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ $(z_A \neq z_B)$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $arg\ (z - z_A) = \theta + 2k\pi$ est la demi-droite partant de A (mais ne contenant pas A) dirigée par le vecteur $\overrightarrow{V}$ tel que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{V}\right) = \theta$

d) Caractérisation d'un réel et d'un imaginaire pur

• z est réel $\Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow z = 0$ ou $arg\ z = 0 + 2k\pi$ ou $arg\ z = \pi + 2k\pi$.
• z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow z = 0$ ou $arg\ z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $arg\ z = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

► *Exemples :*
• Détermination de l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $(2+i)z + 3 - 4i$ soit imaginaire pur.
On pose $z = x + iy$ (x et y réels). $2iz + 3 - 4i$ imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $(2+i)(x+iy) + 3 - 4i$ imaginaire pur $\Leftrightarrow (2x - y + 3) + i(x + 2y - 4)$ imaginaire pur $\Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$. E est donc la droite d'équation $y = 2x + 3$.

• Détermination de l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-i}{z-2}$ soit réel.
Soit A d'affixe i et B d'affixe 2.
$\dfrac{z-i}{z-2}$ réel $\Leftrightarrow z = i$ ou $arg\ \left(\dfrac{z-i}{z-2}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $arg\ \left(\dfrac{z-i}{z-2}\right) = \pi + 2k\pi$ (avec $z \neq 2$).
Ce qui équivaut à $M = A$ ou $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi$ (avec $M \neq B$).
E est donc la droite (AB) privée du point B.

8. Probabilités

a) Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :
• L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.
• Un événement A est une partie de l'univers.
• Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.
• L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
• L'événement $A \cap B$ (noté aussi « A et B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
• L'événement $A \cup B$ (noté aussi « A ou B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
• Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
• Si $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ et si à chaque résultat possible e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que $0 \leqslant p(e_i) \leqslant 1$ et $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

• $p(\varnothing) = 0$; $\quad p(\Omega) = 1$

• $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$; $\quad p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$; $\quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
(si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)

• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p(A) = \dfrac{\text{nb d'éléments de A}}{\text{nb d'éléments de }\Omega} = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$

► *Exemple :* Tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes avec les événements :

$p(\text{la carte tirée est un roi}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad$ $p(\text{la carte tirée est un coeur}) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$

$p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{et}} \text{ un cœur}) = \dfrac{1}{32}$ $\qquad$ $p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{ou}} \text{ un cœur}) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$

b) Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω :
• On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

PROPRIÉTÉ

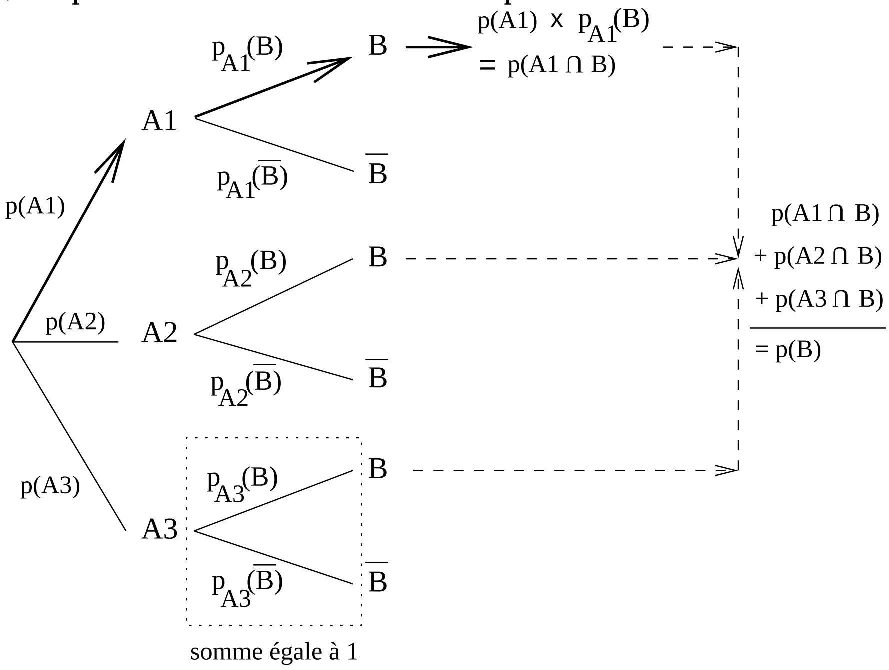
Pour tous événements non vides A et B :
• $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $\quad p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$
• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour A} \cap \text{B}}{\text{nb de cas favorables pour A}}$
• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales
Si A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :

• $p(B) = p(A_1 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

▶ **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**

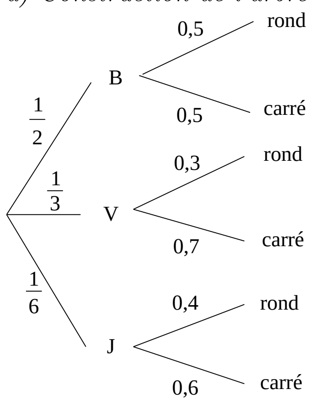


▶ **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**

• Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
• Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
• La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

▶ *Exemple :* Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

a) Construction de l'arbre :



b) Sachant que le jeton tiré est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?

La lecture directe de l'arbre nous donne que $p_B(C) = 0{,}5$.

c) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?

$p(R) = \dfrac{1}{2} \times 0{,}5 + \dfrac{1}{3} \times 0{,}3 + \dfrac{1}{6} \times 0{,}4 = \dfrac{5}{12}$.

d) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

$p_R(B) = \dfrac{p(B \cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times 0{,}5}{\frac{5}{12}} = \dfrac{3}{5}$.

c) Indépendance en probabilité

DÉFINITION

• Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
• Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

d) Loi numérique associée à une expérience aléatoire

On considère une expérience aléatoire où à chaque résultat possible on peut associer un réel X. On note x_i les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X prenne la valeur x_i .

• Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.

• Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$

• Variance de X : $V(X) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i (x_i)^2\right) - \left(E(x)\right)^2 = p_1(x_1)^2 + \cdots + p_n(x_n)^2 - \left(E(x)\right)^2$

• Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$

► *Exemple :* On lance un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il obtient un « 1 » ou un « 6 » et il perd 2 euros dans le cas contraire. Soit X le gain du joueur.
Loi de probabilité de X : X ne peut prendre que les valeurs -2 et 6.
On a $p(X=-2) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $p(X=6) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

x_i	-2	6
p_i *(la somme doit être égale à 1)*	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

$E(X) = \dfrac{2}{3} \times (-2) + \dfrac{1}{3} \times 6 = \dfrac{2}{3}$; $V(X) = \dfrac{2}{3} \times (-2)^2 + \dfrac{1}{3} \times (6)^2 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{128}{9}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{128}{9}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

e) Loi binomiale

Définition

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).

• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

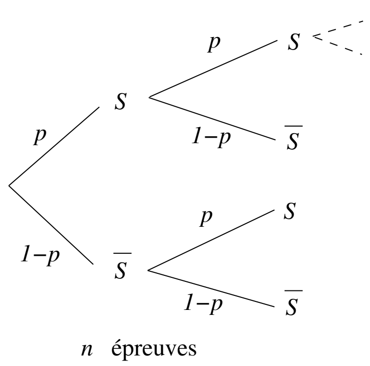
► *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer le dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .
Par contre, si on s'intéresse ensemble aux six événements « obtenir le chiffre n« $(1 \leqslant n \leqslant 6)$, ce n'est plus une épreuve de Bernoulli.

► **Remarques :**

• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès«) et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$).

• Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un *schéma* de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre), que le « succès« a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des *épreuves* de Bernoulli successives.

Propriété



Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.

Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

• **Probabilité d'obtenir k succès** : $p(X=k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$
(k entier tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$)

• **Espérance de** X : $E(X) = np$

• **Variance de** X : $V(X) = np(1-p)$

• **Écart-type de** X : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

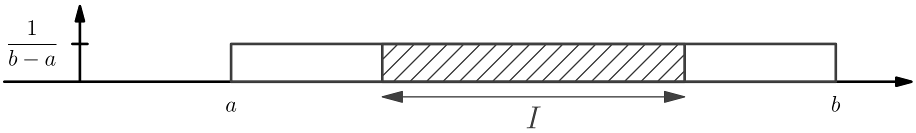
► *Exemple :*
Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\dfrac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».
X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4$.
La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$
La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$
L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np = \frac{7}{6}$.

f) Loi uniforme

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.

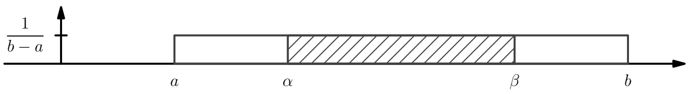


On peut considérer que $p\,(X \in I) = \displaystyle\int_{x\in I} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$. (« aire sous la courbe »)

PROPRIÉTÉ

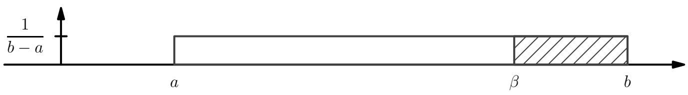
• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[a\,;\,b]$, on a :

$p\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$



$p\,(X \leqslant \alpha) = p\,(a \leqslant X \leqslant \alpha) = \dfrac{\alpha-a}{b-a}$

$p\,(X \geqslant \beta) = p\,(\beta \leqslant X \leqslant b) = \dfrac{b-\beta}{b-a}$



$p\,(X = \alpha) = 0$

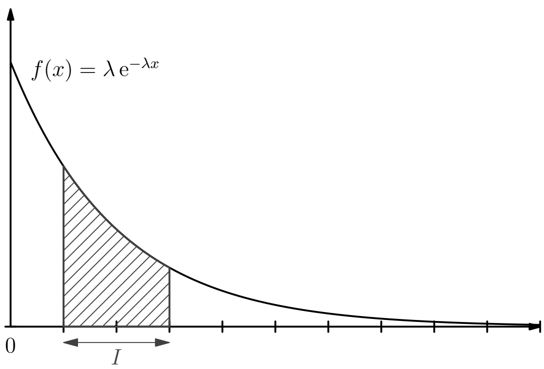
(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

g) Loi exponentielle

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$

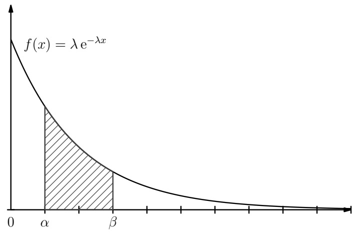


On a donc $p\,(X \in I) = \displaystyle\int_{x\in I} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

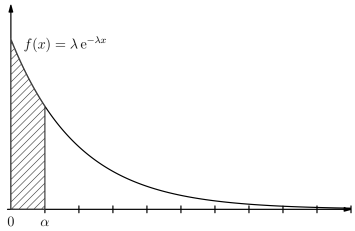
Propriété

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;+\infty[$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[0\,;+\infty[$, on a :

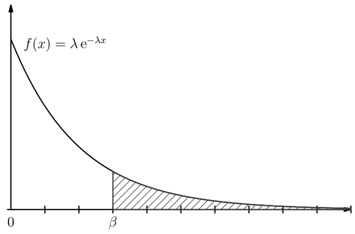
$$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{\alpha}^{\beta}$$



$$p(X \leqslant \alpha) = p(0 \leqslant X \leqslant \alpha) = \int_{0}^{\alpha} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{0}^{\alpha}$$



$$p(X \geqslant \beta) = 1 - p(0 \leqslant X \leqslant \beta) = 1 - \int_{0}^{\beta} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{0}^{\beta}$$



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;+\infty[$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

► *Exemple :* La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0006$ sur $[0,+\infty[$.

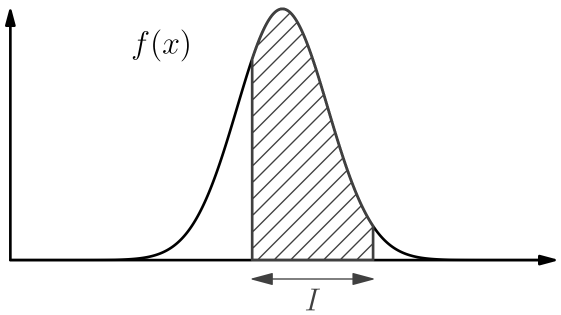
La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est donnée par : $p(X < 1000) = \displaystyle\int_0^{1000} 0{,}0006e^{-0{,}0006x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-0{,}0006x}\right]_0^{1000} = 1 - e^{-0{,}6}$.

La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 500 heures est donnée par : $p(X > 500) = 1 - \displaystyle\int_0^{500} 0{,}0006e^{-0{,}0006x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-e^{-0{,}0006x}\right]_0^{500} = e^{-0{,}3}$.

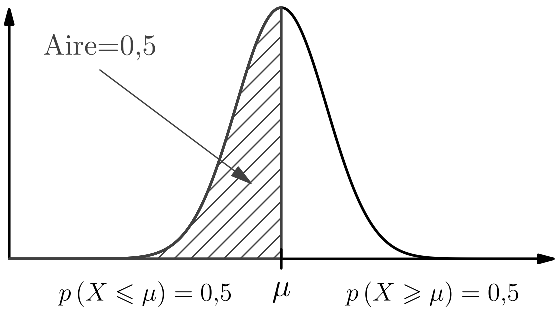
h) Loi normale

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0{,}5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



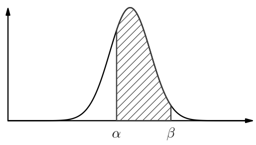
▶ **Remarque :** L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ. On a donc la situation suivante :



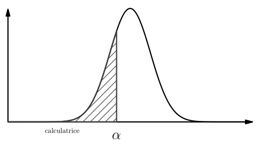
Propriété

• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ alors pour tous réels α et β, on a :

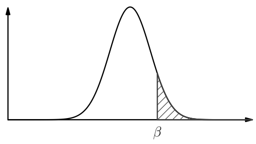
$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) =$
TI : DISTR (2nd+VARS) ; `normalcdf` $(\alpha,\beta,\mu,\sigma)$
CASIO : Menu STAT ; DIST ; NORM ; NCD avec
Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \leqslant \alpha) =$
TI : `normalcdf` $(-10^{99},\alpha,\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \geqslant \beta) =$
TI : `normalcdf` $(\beta,10^{99},\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables :**
$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}68$; $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}95$; $p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

▶ *Exemple 1:* (pour tester sa calculatrice)
Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :
$p(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0{,}682689$; $p(X \leqslant 55) \approx 0{,}308538$; $p(X \geqslant 62) \approx 0{,}252493$

▶ *Exemple 2:* Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client. $p(11{,}9 \leqslant X \leqslant 12{,}2) \approx 0{,}888$, donc 88,8% des tubes sont acceptés par le client.

▶ *Exemple 3:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0{,}067$ et $p(X < 3) = 0{,}159$. On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 0{,}933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0{,}092$.

9. Échantillonnage

a) Intervalle de fluctuation à 95%

Propriété

Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population alors il y a 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion f du caractère au sein de cet échantillon appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \; ; \; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation à 95%** de l'échantillon associé à la proportion p.

b) Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation

Propriété

Étant donné une population dans laquelle **on suppose que la proportion d'un certain caractère est** p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la **fréquence réelle observée** f du caractère dans cet échantillon **est comprise dans l'intervalle de fluctuation** alors on dit qu'**on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien** p (dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

► *Exemple :* Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question. L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est $[0{,}476\,;0{,}564]$ car $0{,}52-1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}52\times0{,}48}{500}}\approx 0{,}476$ et $0{,}52+1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}52\times0{,}48}{500}}\approx 0{,}564$.
0,47 étant en dehors de l'intervalle de fluctuation, on peut rejeter au seuil de 95% l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

c) Estimation par un intervalle de confiance

Propriété

On cherche à connaitre une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** associé à la proportion f.

► *Exemple :* Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est $[14{,}8\%\,;21{,}2\%]$ car $0{,}18-\dfrac{1}{\sqrt{1000}}\approx 0{,}148$ et $0{,}18+\dfrac{1}{\sqrt{1000}}\approx 0{,}212$.