Correction BAC Mathématiques 2014 Métropole - Série S
Enseignement spécialité

Exercice 1 ***Partie A***

1. *$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f_1 alors pour que $\mathscr{C}_1$ passe par le point $A(0;1)$ il faut et il suffit que $f_1(0) = 1$. Or*
$$f_1(0) = 0 + e^{-0} = 1.$$
2. *f_1 est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$ alors*
$$f_1'(x) = 1 - e^{-x}.$$
Donc
$$f_1'(x) > 0$$
si et seulement si
$$1 > e^{-x}$$
donc si et seulement si
$$0 > -x$$
donc si et seulement si
$$x > 0.$$
Par ailleurs, comme pour $x \neq 0$,
$$f_1(x) = x\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$$
et que
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$$
alors
$$\lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = -\infty$$
et alors
$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty.$$
D'autre part par somme de limites usuelles,
$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty.$$
On peut alors tracer le tableau de signe de f_1' et le tableau de variations de f_1 sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. (a) *L'intégrale I_n représente l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}_n$,l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$.*

   (b) *En utilisant cette interprétation et le graphique donné, on peut conjecturer que (I_n) semble décroissante à partir du rang 1 et que sa limite semble être de $\frac{1}{2}$.*
   En effet, pour conjecturer le sens de variation, on s'aperçoit que lorsque n augmente l'aire précédemment décrite diminue.
   Par ailleurs pour la limite, $\mathscr{C}_{60}$ laisse à penser que la courbe représentative de la fonction se rapproche de plus en plus (entre 0 et 1) de la droite d'équation $y = x$. Donc l'aire précédemment délimitée devrait se rapprocher de
   $$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

   $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x + e^{-(n+1)x})dx - \int_0^1 (x + e^{-nx})dx = \int_0^1 (x + e^{-(n+1)x} - x - e^{-nx})dx$ *par linéarité de l'intégrale.*

   Donc
   $$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (e^{-(n+1)x} - e^{-nx})dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - \frac{e^{-nx}}{e^{-(n+1)x}}\right)dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^x)\,dx.$$

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^x)\,dx$.
   Or si
   $$0 \leq x \leq 1$$
   alors
   $$e^0 \leq e^x \leq e^1$$
   donc
   $$1 \leq e^x \leq e$$
   donc
   $$-e \leq -e^x \leq -1$$
   donc
   $$1 - e \leq 1 - e^x \leq 0$$
   or comme
   $$e^{-(n+1)x} \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0;1]$$
   alors pour tout $x \in [0;1]$,
   $$e^{-(n+1)x}(1 - e^x) \leq 0$$
   donc par positivité de l'intégrale
   $$I_{n+1} - I_n \leq 0$$
   donc la suite (I_n) est décroissante à partir du rang 1.
   Montrons que (I_n) est minorée et cela nous donnera que (I_n) converge. Or soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors soit $x \in [0;1]$:
   $$0 \leq x$$
   et
   $$0 \leq e^{-nx}$$
   , donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
   $$f_n(x) = x + e^{-nx} \geq 0$$

donc par positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on a*

$$I_n \geq 0.$$

Donc la suite (I_n) *est décroissante à partir du rang* 1 *et minorée par* 0 *donc la suite* (I_n) *converge.*

3. *Si* $n = 0$

$$I_0 = \int_0^1 (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Si $n \neq 0$ *alors*

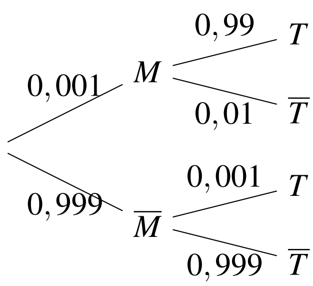
$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx})dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}e^{-n\times 0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-nx}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 ***Partie A***

1. *Nous traduisons l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.*



D'après la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,001 = 1,989 \times 10^{-3}.$$

(b) *On cherche* $P_T(M)$ *or*

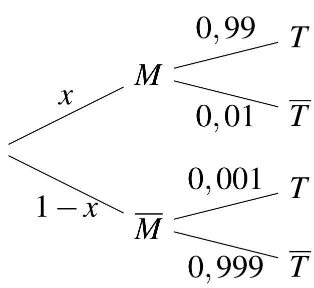
$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,001 \times 0,99}{1,989 \times 10^{-3}} = \frac{0,99 \times 10^{-3}}{1,989 \times 10^{-3}} \approx 0,498.$$

Donc

$$P_T(M) < \frac{1}{2}$$

donc effectivement si le test est positif il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade.

2. *On peut traduire la nouvelle situation par un arbre et alors*



Alors on cherche à résoudre pour x une proportion de personnes

$$P_T(M) \geq 0,95$$

ce qui équivaut à

$$\frac{0,99x}{0,99x+0,001(1-x)} \geq 0,95$$

ce qui équivaut à

$$\frac{0,99x}{0,001+0,989x} \geq 0,95$$

ce qui équivaut à

$$0,99x \geq 0,95 \times 10^{-3} + 0,93955x.$$

ce qui équivaut à

$$50,45 \times 10^{-3}x \geq 0,95 \times 10^{-3}$$

ce qui équivaut à

$$x \geq \frac{0,95}{50,45} = \frac{95}{5045}.$$

Le laboratoire commercialise le test correspondant à partir d'une valeur de x de $\frac{95}{5045}$.

Partie B

1. (a) *On cherche $P(890 \leq X \leq 920)$ d'après la calculatrice*

$$P(890 \leq X \leq 920) \approx 0,92.$$

Donc la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme et de $0,92$ *arrondie à* 10^{-2} *près.*

(b) *On cherche l'entier positif h tel que $P(900-h \leq X \leq 900+h) \approx 0,99$ or cette valeur correspond à $h = 3\sigma = 21$ d'après le cours.*

2. *Pour une proportion théorique p et un échantillon de taille n. Si $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$ alors l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est*

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Or, ici $p = 0,97$ et $n = 1000$, donc $n \geq 30$, et $np \geq n(1-p) \geq 8$. Donc nous vérifions bien les conditions pour faire un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%. Calculons le,

$$\left[0,97 - 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}; 0,97 + 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\right] = [0,9594; 0,9806],$$

en arrondissant par défaut la borne de gauche et par excès celle de droite à 10^{-4} *près. Or,*

$$\frac{1000-53}{1000} = 0,947$$

donc, la proportion mesurée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, donc ce contrôle remet en question les réglages faits par le laboratoire.

Exercice 3 1. *Calculons le discriminant de l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$:*

$$\delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = -48.$$

Donc cette équation admet deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-4-i\sqrt{48}}{2} = \frac{-4-4i\sqrt{3}}{2} = -2-2i\sqrt{3}$$

et

$$z_2 = -2+2i\sqrt{3}.$$

Par ailleurs

$$|z_1| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Donc en appelant $\theta_1 = arg(z_1)$ on obtient

$$\cos(\theta_1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin(\theta_1) = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$z_1 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

et alors

$$z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

2. *Donc $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc*

$$a^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_2 = -2+2i\sqrt{3}.$$

Puisque $a^2 = -2+2i\sqrt{3}$ alors $(-a)^2 = -2+2i\sqrt{3}$. Or il y a deux solutions au plus dans $\mathbb{C}$ de $z^2 = -2+2i\sqrt{3}$, l'une d'elle est

$$a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}.$$

et l'autre est

$$-a = -1-i\sqrt{3}.$$

3. — *Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alors il existe $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tels que $z_1 = x_1+iy_1$ et $z_2 = x_2+iy_2$ alors*

$$\overline{z_1z_2} = \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{x_1x_2-y_1y_2+i(y_1x_2+y_2x_1)} = x_1x_2-y_1y_2-i(y_1x_2+y_2x_1)$$

et

$$\overline{z_1}\times\overline{z_2} = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) = x_1x_2-y_1y_2-i(y_1x_2+y_2x_1) = \overline{z_1z_2}.$$

— *Par récurrence sur n.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $H(n)$: $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
Donc on a $H(1)$ et $H(2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons $H(n)$ montrons que cela implique $H(n+1)$.

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z}$$

donc en utilisant $H(2)$

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \times \overline{z}$$

donc en utilisant $H(n)$

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}.$$

Donc on a $H(n+1)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(n)$ implique $H(n+1)$ et on a $H(1)$ donc la récurrence est prouvée et on a $H(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. *Soit z une solution de l'équation (E) alors d'après la ROC*

$$\overline{z}^4+4\overline{z}^2+16=\overline{z^4}+4\overline{z^2}+16$$

donc

$$\overline{z}^4+4\overline{z}^2+16=\overline{z^4}+\overline{4z^2}+\overline{16}=\overline{z^4+4z^2+16}=\overline{0}=0$$

car z est solution de (E).
Donc si z est solution de (E) alor s $\overline{z}$ est solution de (E).
Comme z_2 est solution de $Z^2+4Z+16=0$ et que $a^2=(-a)^2=z_2$ alors a et $(-a)$ sont solutions de $z^4+4z^2+16=0$ or d'après la question précédentes $\overline{a}$ et $\overline{-a}$ sont alors également solutions de (E). Par ailleurs (E) admet au plus quatre solutions dans $\mathbb{C}$, donc si $a,-a,\overline{a}$ et $\overline{-a}$ sont des complexes distincts nous aurons trouvé les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$. Or

$$a=1+i\sqrt{3},\overline{a}=1-i\sqrt{3},-a=-1-i\sqrt{3} \text{ et } \overline{-a}=-1+i\sqrt{3}.$$

Donc on a trouvé les quatre racines de (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 1. *a_1 est le nombre de poisson dans le bassin A au bout de 1 année et b_1 celui dans le bassin B au bout de 1 année.*
Or il va vendre $b_0=100$ poissons. Donc dans le bassin A au bout de l'année 1 il y aura $2\times 100=200$ poissons provenant de cette vente plus 200 poissons achetés en plus soit 400 poissons en tout, donc $a_1=400$.
Par ailleurs à l'année 1 il a transféré tous les poissons qui étaient dans le bassin A soit $a_0=200$ et les a mis dans le bassin B en y rajoutant 100 poissons qu'il a acheté. Il y a donc alors 300 poisson dans le bassin B au bout de 1 an donc $b_1=300$.

2. (a)

$$AX_n+B=\begin{pmatrix} 0\times a_n+2\times b_n+200 \\ 1\times a_n+0\times b_n+100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b_n+200 \\ a_n+100 \end{pmatrix}.$$

Or au bout de l'année $n+1$ il va passer tous les poissons du bassin A dans le bassin B (après l'avoir vidé) et rajouter 100 poissons. Donc $b_{n+1}=a_n+100$. Et il va racheter deux fois plus de poissons qu'il y en avait dans le bassin B au bout de l'année n et en rajouter 200 dans le bassin A, donc $a_{n+1}=2b_n+200$.
Donc $X_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=AX_n+B$.

(b) *Soit $x,y\in\mathbb{R}$ tels que*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$$

cela équivaut à

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2y+200 \\ x+100 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x=2y+200 \\ y=x+100 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x=2y+200 \\ y=2y+300 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x=2y+200 \\ y=-300 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x=-400 \\ y=-300 \end{cases} .$$

(c) *Soit n un entier naturel*

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1}+400 \\ b_{n+1}+300 \end{pmatrix} = X_{n+1} - \begin{pmatrix} -400 \\ -300 \end{pmatrix} = AX_n + B - \left(A\begin{pmatrix} -400 \\ -300 \end{pmatrix} + B\right)$$

d'après la question précédente. Donc

$$Y_{n+1} = A\left(X_n - \begin{pmatrix} -400 \\ -300 \end{pmatrix}\right) = A\left(X_n + \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}\right) = AY_n.$$

Donc pour tout entier naturel n $Y_{n+1} = AY_n$.

3. (a) *Soit n un entier naturel,*

$$Z_{n+1} = Y_{2(n+1)} = Y_{2n+2} = AY_{2n+2-1} = AY_{2n+1} = A \times AY_{2n+1-1} = A^2Y_{2n} = A^2Z_n.$$

Donc pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2Z_n$.
Or

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 0+2\times 1 & 0\times 2+2\times 0 \\ 1\times 0+0\times 1 & 1\times 2+0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

Donc

$$Z_{n+1} = 2I \times Z_n = 2Z_n.$$

Donc pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$.

(b)

$$Y_{2n+1} = AY_{2n} = A \times 2^nY_0 = 2^n \times AY_0 = 2^nY_1.$$

Donc en lisant la première ligne de Y_{2n} *on obtient*

$$a_{2n} + 400 = 2^n(a_0 + 400)$$

ce qui équivaut à

$$a_{2n} = 600 \times 2^n$$

et en utilisant de même la première ligne de Y_{2n+1} *on obtient*

$$a_{2n+1} + 400 = 2^n(a_1 + 400)$$

ce qui équivaut à

$$a_{2n+1} = 2^n \times 800 - 400.$$

4. (a) *Cet algorithme donne le nombre de poisson dans le bassin A au bout de l'année p grâce à ce que nous venons de prouver (il distingue les années paires des années impaires).*

(b) *Le bassin A peut contenir jusqu'à 10 000 poissons. Si on appelle nombre l'algorithme précédemment alors on peut écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A de la façon suivante :*
Variables : a, i et n sont des entiers naturels.
Initialisation : a prend la valeur 200 i prend la valeur 0.
Traitement : Tant que $a < 10000$ *faire*
Affecter à i la valeur $i+1$.
Affecter à a la valeur nombre(i).
Fin tant que.
Sortie : Afficher $i-1$.