Correction BAC Mathématiques 2014 Métropole - Série S
Enseignement obligatoire

Exercice 1 ***Partie A***

1. *$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f_1 alors pour que $\mathscr{C}_1$ passe par le point $A(0;1)$ il faut et il suffit que $f_1(0) = 1$. Or*
$$f_1(0) = 0 + e^{-0} = 1.$$
2. *f_1 est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$ alors*
$$f_1'(x) = 1 - e^{-x}.$$
Donc
$$f_1'(x) > 0$$
si et seulement si
$$1 > e^{-x}$$
donc si et seulement si
$$0 > -x$$
donc si et seulement si
$$x > 0.$$
Par ailleurs, comme pour $x \neq 0$,
$$f_1(x) = x\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$$
et que
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$$
alors
$$\lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = -\infty$$
et alors
$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty.$$
D'autre part par somme de limites usuelles,
$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty.$$
On peut alors tracer le tableau de signe de f_1' et le tableau de variations de f_1 sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. (a) *L'intégrale I_n représente l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}_n$,l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$.*

   (b) *En utilisant cette interprétation et le graphique donné, on peut conjecturer que (I_n) semble décroissante à partir du rang 1 et que sa limite semble être de $\frac{1}{2}$.*
   En effet, pour conjecturer le sens de variation, on s'aperçoit que lorsque n augmente l'aire précédemment décrite diminue.
   Par ailleurs pour la limite, $\mathscr{C}_{60}$ laisse à penser que la courbe représentative de la fonction se rapproche de plus en plus (entre 0 et 1) de la droite d'équation $y = x$. Donc l'aire précédemment délimitée devrait se rapprocher de

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x+e^{-(n+1)x})dx - \int_0^1 (x+e^{-nx})dx = \int_0^1 (x+e^{-(n+1)x} - x - e^{-nx})dx$ *par linéarité de l'intégrale.*

Donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (e^{-(n+1)x} - e^{-nx})dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - \frac{e^{-nx}}{e^{-(n+1)x}}\right)dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1-e^x)\,dx.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1-e^x)\,dx$.
Or si

$$0 \leq x \leq 1$$

alors

$$e^0 \leq e^x \leq e^1$$

donc

$$1 \leq e^x \leq e$$

donc

$$-e \leq -e^x \leq -1$$

donc

$$1-e \leq 1-e^x \leq 0$$

or comme

$$e^{-(n+1)x} \geq 0 \text{ pour tout } x \in [0;1]$$

alors pour tout $x \in [0;1]$,

$$e^{-(n+1)x}(1-e^x) \leq 0$$

donc par positivité de l'intégrale

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

donc la suite (I_n) est décroissante à partir du rang 1.
Montrons que (I_n) est minorée et cela nous donnera que (I_n) converge. Or soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors soit $x \in [0;1]$:

$$0 \leq x$$

et

$$0 \leq e^{-nx}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f_n(x) = x + e^{-nx} \geq 0$$

donc par positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *on a*

$$I_n \geq 0.$$

Donc la suite (I_n) *est décroissante à partir du rang* 1 *et minorée par* 0 *donc la suite* (I_n) *converge.*

3. *Si* $n = 0$

$$I_0 = \int_0^1 (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Si $n \neq 0$ *alors*

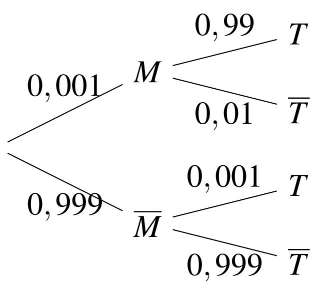
$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx})dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}e^{-n\times 0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-nx}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 ***Partie A***

1. *Nous traduisons l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.*



D'après la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,001 = 1,989 \times 10^{-3}.$$

(b) *On cherche* $P_T(M)$ *or*

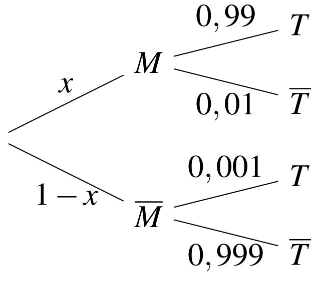
$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,001 \times 0,99}{1,989 \times 10^{-3}} = \frac{0,99 \times 10^{-3}}{1,989 \times 10^{-3}} \approx 0,498.$$

Donc

$$P_T(M) < \frac{1}{2}$$

donc effectivement si le test est positif il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade.

2. *On peut traduire la nouvelle situation par un arbre et alors*



Alors on cherche à résoudre pour x une proportion de personnes

$$P_T(M) \geq 0,95$$

ce qui équivaut à

$$\frac{0,99x}{0,99x + 0,001(1-x)} \geq 0,95$$

ce qui équivaut à

$$\frac{0,99x}{0,001 + 0,989x} \geq 0,95$$

ce qui équivaut à

$$0,99x \geq 0,95 \times 10^{-3} + 0,93955x.$$

ce qui équivaut à

$$50,45 \times 10^{-3}x \geq 0,95 \times 10^{-3}$$

ce qui équivaut à

$$x \geq \frac{0,95}{50,45} = \frac{95}{5045}.$$

Le laboratoire commercialise le test correspondant à partir d'une valeur de x de $\frac{95}{5045}$.

Partie B

1. (a) *On cherche* $P(890 \leq X \leq 920)$ *d'après la calculatrice*

$$P(890 \leq X \leq 920) \approx 0,92.$$

Donc la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme et de $0,92$ *arrondie à* 10^{-2} *près.*

(b) *On cherche l'entier positif h tel que* $P(900 - h \leq X \leq 900 + h) \approx 0,99$ *or cette valeur correspond à* $h = 3\sigma = 21$ *d'après le cours.*

2. *Pour une proportion théorique p et un échantillon de taille n. Si* $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$ *alors l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est*

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].$$

Or, ici $p = 0,97$ *et* $n = 1000$*, donc* $n \geq 30$*, et* $np \geq n(1-p) \geq 8$*. Donc nous vérifions bien les conditions pour faire un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de* 95%*. Calculons le,*

$$\left[0,97 - 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}; 0,97 + 1,96\frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\right] = [0,9594; 0,9806],$$

en arrondissant par défaut la borne de gauche et par excès celle de droite à 10^{-4} *près. Or,*

$$\frac{1000 - 53}{1000} = 0,947$$

donc, la proportion mesurée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, donc ce contrôle remet en question les réglages faits par le laboratoire.

Exercice 3 1. *Calculons le discriminant de l'équation* $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ *:*

$$\delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = -48.$$

Donc cette équation admet deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-4-i\sqrt{48}}{2} = \frac{-4-4i\sqrt{3}}{2} = -2-2i\sqrt{3}$$

et

$$z_2 = -2+2i\sqrt{3}.$$

Par ailleurs

$$|z_1| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Donc en appelant $\theta_1 = arg(z_1)$ *on obtient*

$$\cos(\theta_1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin(\theta_1) = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$z_1 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

et alors

$$z_2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

2. *Donc* $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. *Donc*
$$a^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_2 = -2+2i\sqrt{3}.$$
Puisque $a^2 = -2+2i\sqrt{3}$ *alors* $(-a)^2 = -2+2i\sqrt{3}$. *Or il y a deux solutions au plus dans* $\mathbb{C}$ *de* $z^2 = -2+2i\sqrt{3}$, *l'une d'elle est*
$$a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}.$$
et l'autre est
$$-a = -1-i\sqrt{3}.$$

3. — *Soit* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *alors il existe* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $z_1 = x_1+iy_1$ *et* $z_2 = x_2+iy_2$ *alors*
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{x_1x_2-y_1y_2+i(y_1x_2+y_2x_1)} = x_1x_2-y_1y_2-i(y_1x_2+y_2x_1)$$
et
$$\overline{z_1}\times\overline{z_2} = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) = x_1x_2-y_1y_2-i(y_1x_2+y_2x_1) = \overline{z_1z_2}.$$
— *Par récurrence sur n.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $H(n)$: $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
Donc on a $H(1)$ *et* $H(2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *supposons* $H(n)$ *montrons que cela implique* $H(n+1)$.
$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z}$$
donc en utilisant $H(2)$
$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \times \overline{z}$$
donc en utilisant $H(n)$
$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}.$$
Donc on a $H(n+1)$. *Donc pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $H(n)$ *implique* $H(n+1)$ *et on a* $H(1)$ *donc la récurrence est prouvée et on a* $H(n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

4. *Soit z une solution de l'équation (E) alors d'après la ROC*

$$\overline{z}^4+4\overline{z}^2+16=\overline{z^4}+4\overline{z^2}+16$$

donc

$$\overline{z}^4+4\overline{z}^2+16=\overline{z^4}+\overline{4z^2}+\overline{16}=\overline{z^4+4z^2+16}=\overline{0}=0$$

car z est solution de (E).
Donc si z est solution de (E) alor s $\overline{z}$ est solution de (E).
Comme z_2 est solution de $Z^2+4Z+16=0$ et que $a^2=(-a)^2=z_2$ alors a et $(-a)$ sont solutions de $z^4+4z^2+16=0$ or d'après la question précédentes $\overline{a}$ et $\overline{-a}$ sont alors également solutions de (E). Par ailleurs (E) admet au plus quatre solutions dans $\mathbb{C}$, donc si $a,-a,\overline{a}$ et $\overline{-a}$ sont des complexes distincts nous aurons trouvé les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$. Or

$$a=1+i\sqrt{3},\overline{a}=1-i\sqrt{3},-a=-1-i\sqrt{3} \text{ et } \overline{-a}=-1+i\sqrt{3}.$$

Donc on a trouvé les quatre racines de (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 1. (a) *D est le point de coordonnées $(0;0;1)$ et F celui de coordonnées $\left(\frac{1+0}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2}\right)=(0,5;0,5;0)$.*

(b) *Alors le vecteur $\overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-1\end{pmatrix}$ et alors la droite (DF) a pour équation paramétrique*

$$\begin{cases}x=0,5t\\y=0,5t\\z=-t+1\end{cases}.$$

(c) *Comme le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (DF), le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, donc il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ soit*

$$0,5x+0,5y-z+a=0.$$

Par ailleurs, $A\in\mathscr{P}$ donc

$$0,5\times 0+0,5\times 0-0+a=0$$

donc

$$a=0$$

et une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est

$$0,5x+0,5y-z=0.$$

(d) *Soit $H(x;y;z)$ le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF), alors*

$$\begin{cases}x=0,5t\\y=0,5t\\z=-t+1\\0,5x+0,5y-z=0\end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases}x=0,5t\\y=0,5t\\z=-t+1\\0,5\times 0,5t+0,5\times 0,5t-(-t+1)=0\end{cases}$$

ce qui équivaut)

$$\begin{cases} x = 0,5t \\ y = 0,5t \\ z = -t+1 \\ 0,25t + 0,25t + t - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,5t \\ y = 0,5t \\ z = -t+1 \\ 1,5t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,5t \\ y = 0,5t \\ z = -t+1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Donc H a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

(e) *Pour démontrer que l'angle* $\widehat{EHG}$ *est droit l'on va regarder si les vecteurs* $\overrightarrow{HE}$ *et* $\overrightarrow{HG}$ *sont orthogonaux. OR les coordonnées de E sont* $(0,5;0;0)$ *et les coordonnées de G sont* $(0;0,5;0)$. *Donc*

$$\overrightarrow{HE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

de même

$$\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG} = \frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\times\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{18}+\frac{1}{9} = 0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ *et* $\overrightarrow{HG}$ *sont orthogonaux, donc l'angle* $\widehat{EHG}$ *est un angle droit.*

2. (a) *D'après la relation de Chasles*

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DE}.$$

Donc

$$ME^2 = MD^2 + 2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DE} + DE^2$$

or

$$MD^2 = t^2DF^2 = t^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2\right) = \frac{3}{2}t^2$$

et

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

alors

$$DE^2 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2\right) = \frac{5}{4}$$

puis

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DE} = -t\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE} = -t\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 0 - 1\times(-1)\right) = -\frac{5}{4}t$$

donc

$$ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}.$$

(b) *D'après la relation de Chasles*

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DG}.$$

Donc

$$MG^2 = MD^2 + 2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DG} + DG^2$$

or

$$MD^2 = t^2DF^2 = t^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2\right) = \frac{3}{2}t^2$$

et

$$\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

alors

$$DG^2 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2\right) = \frac{5}{4}$$

puis

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DG} = -t\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DG} = -t\left(\frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - 1\times(-1)\right) = -\frac{5}{4}t$$

donc

$$MG^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}.$$

Donc $MG = ME$ *car ce sont des longueurs, donc le triangle* MEG *est isocèle en* M*. Donc les angles* $\widehat{MEG}$ *et* $\widehat{EGM}$ *sont tous les deux égaux à* $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$*. Donc*

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{EG} = ME\times EG\times\cos\left((\overrightarrow{ME},\overrightarrow{EG})\right) = ME\times EG\times\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = ME\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Par ailleurs

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EG} = -t\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EG} = -t\times 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

donc

$$ME\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}$$

ce qui équivaut à

$$ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

(c) *Nous allons étudier la fonction* $\alpha\mapsto\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ *sur* $[0;\pi]$. *Or cette fonction est croissante sur* $[0;\pi]$ *car alors* $0\leq\frac{\alpha}{2}\leq\frac{\pi}{2}$ *donc* α *est maximale si et seulement si* $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ *est maximal.*
Comme $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ *est une constante alors* $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ *est maximal si et seulement si ME est minimale (puisque ce sont des valeurs positives) ce qui équivaut à* $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ *est maximal si et seulement si* ME^2 *est minimale (toujours pas positivité) ce qui équivaut à* α *est maximale si et seulement si* ME^2 *est minimale.*

(d) ME^2 *est une fonction polynômiale, comme* $\frac{3}{2}>0$ *alors* ME^2 *admet un minimum en*

$$t=\frac{-\left(-\frac{5}{2}\right)}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{5}{6}.$$

Donc pour que la valeur de α *soit maximal on place le point M tel que*

$$\overrightarrow{DM}=\frac{5}{6}\overrightarrow{DF}.$$