Baccalauréat Polynésie 16 juin 2014
STI2D–STL spécialité SPCL Correction

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie la réponse choisie

Dans les questions 1. et 2., on considère le complexe $z = -2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. Le complexe z^3 est égal à :

a. $\cancel{8}$ **b.** $\boxed{-8}$ **c.** $\cancel{8\mathrm{i}}$ **d.** $\cancel{-8\mathrm{i}}$

2. Un argument de z est

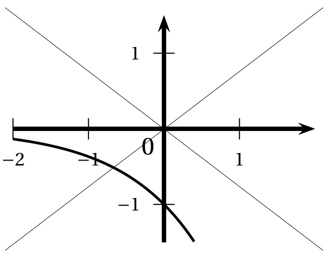
a. $\cancel{-\dfrac{2\pi}{3}}$ **b.** $\cancel{\dfrac{2\pi}{3}}$ **c.** $\cancel{-\dfrac{\pi}{3}}$ **d.** $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

3. On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 2$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels.
Une solution f de cette équation est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

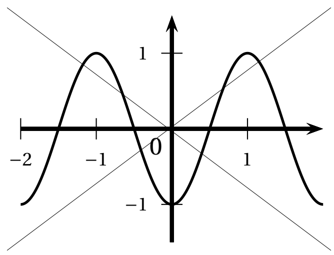
a. $\cancel{f(x) = 2\mathrm{e}^{-3x}}$ **b.** $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{3x} + \dfrac{2}{3}}$ **c.** $\cancel{f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}}$ **d.** $\cancel{f(x) = \mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}}$

4. La solution f de l'équation différentielle $y'' + 4\pi^2 y = 0$ qui vérifie $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$ admet comme représentation graphique :

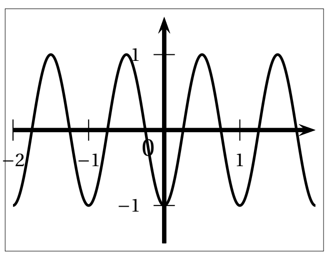
a.



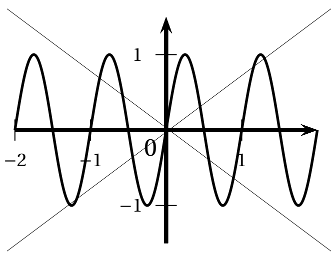
b.



c.



d.



EXERCICE 2 **4 points**

« *En 2009, les Français ont en moyenne produit* 374 kg *de déchets ménagers par habitant.* »
Source Ademe

Le maire d'une commune de 53 700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23 000 tonnes de déchets en 2009. Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux.
Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant 5 ans.

1. La déception du maire en 2009 est due à une quantité de déchets ménagers supérieure à la moyenne nationale.
Cette proportion est $\dfrac{23\,000\,000}{53\,700} \approx 428{,}3$. Dans sa commune, il a été produit en moyenne 428 kg de déchets ménagers par habitant.

2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.

   a. À un taux d'évolution de $-1{,}5\,\%$ correspond un coefficient multiplicateur de $1 - 0{,}015 = 0{,}985$. Nous obtenons d_1 en multipliant d_0 par ce coefficient multiplicateur d'où $d_1 = 0,985d_0$.

   b. Nous déduisons le terme suivant d'un élément de la suite en multipliant celui-ci par le même nombre, par conséquent la suite (d_n) est une suite géométrique de raison 0,985 et de premier terme 400.
   Exprimons d_n en fonction de n.
   Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$ donc ici,
   $d_n = 400 \times (0{,}985)^n$.
   calculons la limite de la suite (d_n).
   Une suite géométrique de raison q avec $0 < q < 1$ est une suite convergeant vers 0. $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

   c. Déterminons la production en kilogrammes de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 si la baisse se poursuit au même rythme. En 2014, $n = 3$ calculons d_3. $d_3 = 400 \times (0{,}985)^3 \approx 382$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel d.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à d la valeur 400
Traitement :	Tant que $d > 374$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Affecter à d la valeur $0,985d$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

la valeur affichée pour N est 5 . Ce résultat signifie qu'en 2016 (2011+5) la production de déchets ménagers dans la commune sera inférieure ou égale à 374 kg, production moyenne produite par les Français en 2009.

EXERCICE 3 — 5 points

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante. Les résultats seront arrondis à 10^{-3}près.
Une entreprise produit en grande quantité des emballages alimentaires de forme cubique en polypropylène.
Elle utilise pour cela la technique du thermoformage, qui consiste à chauffer une plaque de plastique puis à la former à l'aide d'un moule. Lors du refroidissement, la pièce rétrécit légèrement mais conserve la forme du moule.
L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité d'une production de boîtes cubiques.

A. Loi normale

Une boîte est jugée conforme lorsque la mesure de son arête, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [16,7 ; 17,3].
La mesure de l'arête d'une boîte est modélisée par une variable aléatoire C qui suit la loi normale d'espérance 17 et d'écart type 0, 14.

1. À l'aide de la calculatrice nous obtenons $P(16,7 \leqslant C \leqslant 17,3) \approx 0{,}968$.

2. La probabilité qu'une boîte prélevée au hasard dans la production soit non conforme est la probabilité de l'événement contraire de l'événement précédent. $P(\overline{C}) = 1 - 0{,}968 = 0{,}032$

B. Loi binomiale

L'entreprise conditionne ces boîtes par lots de 200. On prélève au hasard une boîte dans la production.
On note p la probabilité de l'évènement : « la boîte prélevée au hasard dans la production est non conforme ».

On prélève au hasard 200 boîtes dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 200 boîtes, associe le nombre de boîtes non conformes qu'il contient. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 200 et p, et, qu'en moyenne chaque lot de 200 boîtes en contient 6 non conformes.

1. Justifions que $p = 0,03$. En moyenne chaque lot de 200 boîtes contient 6 boites non conformes. La probabilité d'obtenir une boite non conforme est par conséquent $\dfrac{6}{200}$ d'où $p = 0{,}03$.

   Nous avons donc une loi binomiale de paramètres (200 ; 0,03) par conséquent $p(X = k) = \binom{200}{k}(0{,}03)^k(0{,}97)^{200-k}$.

2. Calculons la probabilité qu'il y ait au moins deux boîtes non conformes dans ce lot de 200 boîtes.

   Calculons la probabilité de l'événement contraire $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$

   $p(X = 0) = \binom{200}{0}(0{,}97)^{200} \approx 0{,}002 \quad p(X = 1) = \binom{200}{1}(0{,}03)(0{,}97)^{200-1} \approx 0{,}014$.

   Par conséquent $p(X \geqslant 2) = 1 - (0{,}002 + 0{,}014) = 1 - 0{,}016 = 0{,}984$.

C. Intervalle de fluctuation

On rappelle que, pour une proportion p connue dans une production, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % d'une fréquence calculée sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Dans le cadre d'un fonctionnement correct du thermoformage, on admet que la proportion p de boîtes non conformes dans la production est 3 %.

1. Déterminons les bornes de l'intervalle I pour un échantillon de taille 200.

   $p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \qquad 0{,}03 - 1,96\sqrt{\dfrac{0{,}03(1-0{,}03)}{200}} \approx 0{,}006$

   $p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \qquad 0{,}03 - 1,96\sqrt{\dfrac{0{,}03(1-0{,}03)}{200}} \approx 0{,}054$

2. On contrôle le bon fonctionnement du thermoformage en prélevant au hasard dans la production des échantillons de 200 boîtes. Au cours de l'un de ces contrôles, un technicien a compté 10 boîtes non conformes.

   La proportion de boites non conformes dans l'échantillon est égale à 0,05 $\left(\dfrac{10}{200}\right)$.

   Il ne doit pas prendre la décision d'effectuer des réglages sur la thermoformeuse puisque cette proportion appartient à l'intervalle de fluctuation à 95 %.

EXERCICE 4 **7 points**

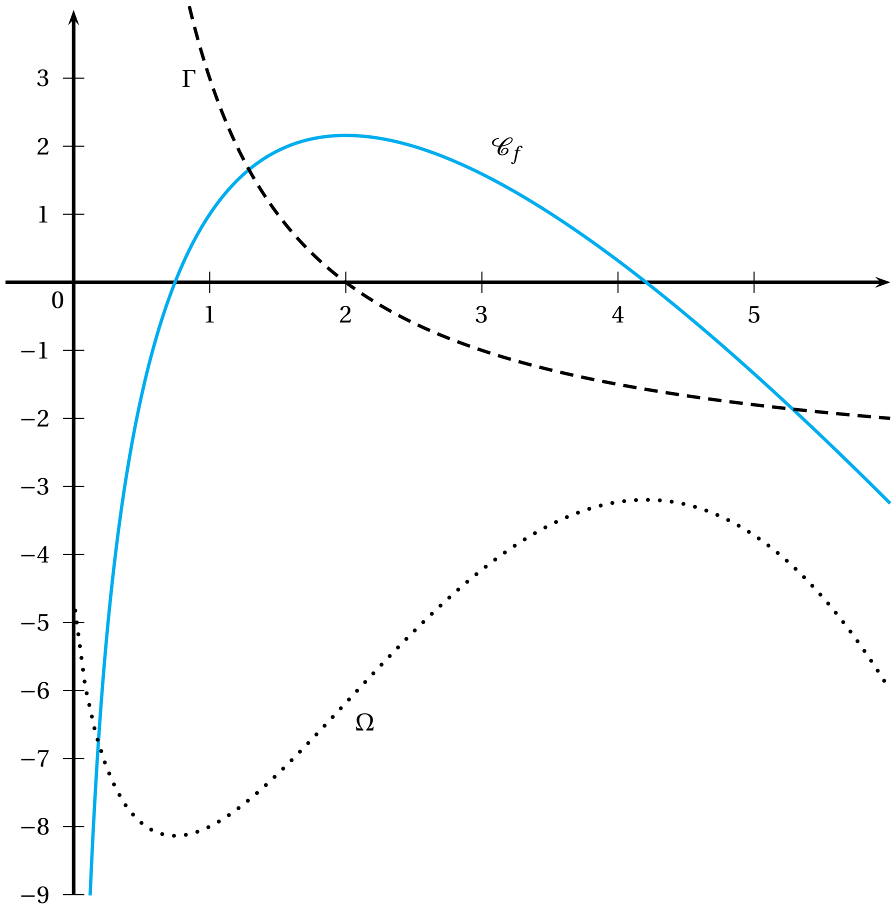
Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6\ln x + ax + b$$

où a et b sont des constantes réelles,
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Le point A(1 ; 1) appartient à $\mathscr{C}_f$.
$\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_f$ (trait plein) ainsi que les courbes Γ et Ω.
L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.



1. La courbe Ω est la représentation graphique de F. La fonction f n'étant pas toujours négative, la courbe Γ ne peut être la courbe représentative de F car elle est la courbe représentatrice d'une fonction toujours décroissante.

2. Puisque A appartient à $\mathscr{C}_f$, $f(1) = 1$ et $f'(2) = 0$ puisqu'en 2, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3. $f'(x) = 6 \times \dfrac{1}{x} + a$.

4. Puisque $f(1) = 1$ en remplaçant x par 1 nous obtenons $6\ln 1 + a \times 1 + b = 1$ ou en simplifiant $a + b = 1$.

   Puisque $f'(2) = 0$ en remplaçant x par 2 nous obtenons $\dfrac{6}{2} + a = 0$ ou en simplifiant $a + 3 = 0$.

   De cette dernière ligne, nous obtenons $a = -3$ et en reportant dans l'autre équation nous obtenons $b = 4$.

   Par suite en reportant ces valeurs dans l'expression définissant f, nous avons : $f(x) = 6\ln x - 3x + 4$.

PARTIE B

Dans cette partie, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec la courbe $\mathscr{C}_f$ fournie dans la partie A.

1. Déterminons la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 6\ln x + \lim_{x\to 0}(-3x+4) = -\infty + 4 = -\infty$$

   L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f lorsque x tend vers 0

2. Montrons que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}(2-x)$.

   Dans la partie précédente, nous avons déterminé la fonction dérivée de f. Remplaçons a par sa valeur.

   $f'(x) = \dfrac{6}{x} - 3$. En factorisant par $\dfrac{3}{x}$, $f'(x) = \dfrac{3}{x}(2-x)$. Nous avons obtenu le résultat attendu.

3. Étudions le signe de $f'(x)$. $f'(x)$ est du signe de $2-x$ puisque x étant strictement positif, $\dfrac{3}{x}$ l'est également.

Sur $\mathbb{R}\quad 2-x>0 \iff x<2$

Par conséquent si $x \in]0~;~2[$, $f'(x)>0$ et si $x\in]2~;~+\infty[$, $f'(x)<0$.

Étudions les variations de la fonction f.

Si pour tout $x\in I$, $f'(x)>0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I. Pour tout $x\in]0~;~2[$, $f'(x)>0$ par conséquent f est strictement croissante sur ce intervalle.

Si pour tout $x\in I$, $f'(x)<0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I. Pour tout $x\in]2~;~+\infty[$, $f'(x)<0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$6\ln 2-2$	$\searrow$	$-\infty$

4. La fonction f admet un maximum en 2 puisque en ce point la dérivée s'annule en changeant de signe.

$f(2)=6\ln 2-3\times 2+4=6\ln 2-2$.

PARTIE C

Soit H la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $H(x)=6x\ln x-\dfrac{3}{2}x^2-2x$.

1. H est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$ lorsque $H'(x)=f(x)$.

$$H'(x)=6\ln x+6x\times\frac{1}{x}-\frac{3}{2}(2x)-2=6\ln x-3x+4=f(x)$$

H est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

2. Calculons la valeur exacte de $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$I=\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[H(x)\Big]_1^{\mathrm{e}}=H(\mathrm{e})-H(1)=6\mathrm{e}\ln\mathrm{e}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}-\left(6\ln 1-\frac{3}{2}-2\right)=4\mathrm{e}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^2+\frac{7}{2}.$$

3. Sur $[1~;~\mathrm{e}]$, $f(x)>0$. I est en unités d'aire, l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.

4. **a.** Avec la précision permise par le graphique, $F(1)=-8$.

b. F et H sont des primitives de f par conséquent $F(x)=H(X)+C$. Déterminons la constante C.

$F(1)=H(1)+C=-\dfrac{7}{2}+C=-8\quad C=-8+\dfrac{7}{2}=-\dfrac{9}{2}$.

$F(x)=6x\ln x-\dfrac{3}{2}x^2-2x-\dfrac{9}{2}$ pour tout x dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.