Baccalauréat STL Biotechnologies
19 juin 2014 Métropole

EXERCICE 1 **4 points**

On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution de la production annuelle en Indonésie de la vanille, épice utilisée dans les industries agroalimentaire et cosmétique. Le tableau ci-dessous donne la production de vanille en Indonésie :

Année	1970	1980	1990	1995	2000	2005	2010
Rang de l'année : x_i	0	10	20	25	30	35	40
Production en tonnes : y_i	250	761	1 262	1 958	1 681	2 366	2 600

Source : FAOSTAT

1. On pose $z_i = \ln(y_i)$

   Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats à 10^{-2} près.

Rang de l'année : x_i	0	10	20	25	30	35	40
z_i							

2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, z_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal sur l'annexe, page 4.
3. Calculer les coordonnées, à 10^{-2} près, du point moyen G du nuage. Placer le point G sur le graphique.
4. On réalise un ajustement affine de ce nuage de points $M_i(x_i, z_i)$.

   À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite D d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à 10^{-4} près).

   Construire la droite D sur le graphique de l'annexe, page 4.
5. En déduire, selon ce modèle d'ajustement, l'expression de la production y en fonction du rang de l'année x.
6. Quelle serait, selon ce modèle d'ajustement, la production de vanille en Indonésie en 2015 ?

EXERCICE 2 **5 points**

On injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de $2\,\text{cm}^3$ d'un antalgique.
L'organisme du patient élimine 5 % du produit présent tous les quarts d'heure.
On s'intéresse à la quantité d'antalgique, en mm^3, présent dans le sang du patient au bout de n quarts d'heure après le début de l'injection.
La situation peut être modélisée par une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 2000$, u_n représentant une estimation de la quantité d'antalgique en mm^3 présent dans le sang du patient après n quarts d'heure.

1. Vérifier que la quantité de produit présent dans le sang du patient un quart d'heure après l'injection est égale à $1\,900\,\text{mm}^3$.
2. **a.** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

   b. En déduire la nature de la suite (u_n).

   c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.
4. Le produit est jugé inefficace lorsque la quantité présente dans le sang est inférieure à $1\,500\,\text{mm}^3$. Déterminer au bout de combien de quarts d'heure le produit devient inefficace. On précisera la démarche choisie.
5. **a.** Pendant une durée égale à N quarts d'heure, on décide de réinjecter $500\,\text{mm}^3$ du même antalgique dès que la quantité du produit présent dans le sang devient inférieure à $1\,500\,\text{mm}^3$.
   Compléter, sur l'annexe page 4, l'algorithme déterminant la quantité d'antalgique présent dans le sang du patient au bout de ces N quarts d'heure.

b. En faisant fonctionner l'algorithme, déterminer la quantité d'antalgique présent dans le sang au bout de quatre heures.

EXERCICE 3 **6 points**

Le but de l'exercice est de suivre l'évolution d'une concentration de bactéries.
Les unités choisies sont l'heure pour le temps et le million de bactéries par millilitre pour la concentration.

Partie A

On admet que la concentration de bactéries en fonction du temps est donnée à l'instant t par $f(t)$ où f, fonction définie sur $[0, +\infty[$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : y' + 0,2y = 8.$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0, +\infty[$.
2. À l'instant $t = 0$, la concentration est de 4 millions de bactéries par millilitre. Donner l'expression de la concentration des bactéries en fonction du temps.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = -36\mathrm{e}^{-0,2t} + 40$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on donner de cette limite ?
2. **a.** On note f' la fonction dérivée de f.
   Calculer $f'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$.

   b. En déduire les variations de f sur $[0, +\infty[$.

Partie C

On admet que $f(t)$ représente la concentration des bactéries étudiée dans la partie A.

1. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour une heure en abscisse et 1 cm pour 5 millions de bactéries par millilitre en ordonnée.
2. En faisant apparaître les constructions utiles, déterminer graphiquement :

   a. la concentration des bactéries au bout de 6 h 30 ;

   b. le temps nécessaire pour que la concentration des bactéries soit supérieure à 35 millions de bactéries par millilitre.

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

Un laborantin dispose d'un stock de pipettes jaugées. Une pipette est considérée conforme au cahier des charges si son volume est compris entre 24,95 et 25,05 ml.
On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute pipette prise au hasard dans le stock, associe son volume en ml. Le fabricant affirme que Y suit la loi normale d'espérance 25 et d'écart type 0,03.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme au cahier des charges, selon les affirmations du fabricant.
2. Le laborantin prélève un échantillon de 100 pipettes et constate que seulement 83 d'entre elles sont conformes au cahier des charges.

a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de pipettes conformes dans un échantillon de taille 100 (on donnera les bornes de l'intervalle à 10^{-4} près).

b. La fréquence de pipettes conformes observée remet-elle en question l'affirmation du fabricant ? Justifier.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse aux défaillances d'une machine qui fabrique les pipettes. Lorsqu'une révision complète de cette machine a été effectuée, la durée de fonctionnement (en jours) avant une défaillance est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,005$.

On rappelle que, dans ces conditions, pour tout t positif, la probabilité que cette machine ait une défaillance avant un temps t est égale à $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^t 0,005\mathrm{e}^{-0,005x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-0,005t}$.

2. Déterminer la probabilité $P(X \leqslant 200)$ à 10^{-4} près. Quelle interprétation peut-on donner de cette probabilité ?

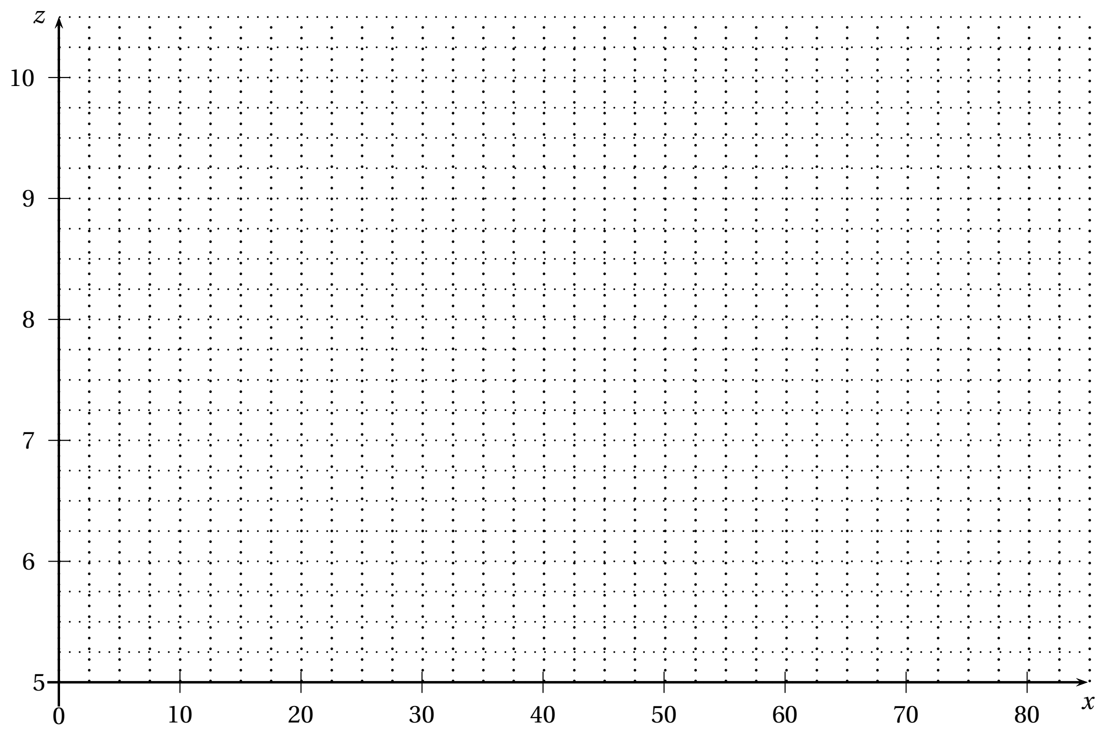
3. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que la machine ait une défaillance au-delà de 300 jours après une révision complète.

4. Un arrêt pour entretien doit intervenir systématiquement lorsque la probabilité que la machine soit défaillante est égale à 0,5.

   Au bout de combien de jours faut-il prévoir l'arrêt pour l'entretien de cette machine ?

ANNEXE **(à rendre avec la copie)**

EXERCICE 1



EXERCICE 2

Variables :	u nombre réel, N entier
Entrée :	Saisir N
Traitement :	
	Affecter à u la valeur 2 000
	Pour i allant de 1 à ……faire
	Affecter à $u$la valeur $u \times \ldots$
	Si u est inférieur à ……
	Alors affecter à u la valeur $u + \ldots\ldots$
	Fin si
	Fin pour
	Afficher u
Fin	