CORRIGE DE L'EPREUVE DE BAC ES 2016 – PONDICHERY

Exercice 1

Dans cet exercice, aucune justification n'était demandée.
Toutefois, afin que le lecteur comprenne la réponse, le correcteur a rédigé une justification pour chaque question.

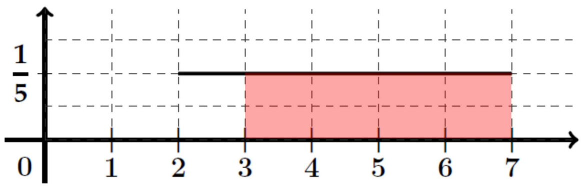
1. On sait que $f(x) = 3x - x\ln x = 3x - u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$
$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

Donc $f'(x) = 3 - \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)$
$= 3 - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)$
$= 3 - (\ln x + 1)$
$= 3 - \ln x - 1$

Donc $f'(x) = 2 - \ln x$ ➔ **Réponse (c)**

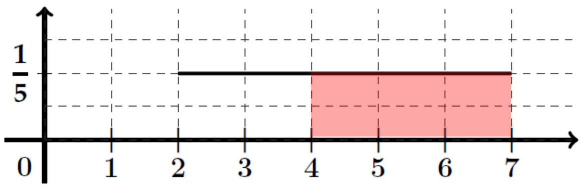
2. La somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est :
$S = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Dans ce cas, on a $u_0 = 1$, q = 2 et n + 1 = 13 (« 13 premiers termes de la suite »)
Donc $S = 1 \times \frac{1-2^{13}}{1-2} = \frac{1-8192}{-1} = \frac{-8191}{-1} = 8191$ ➔ **Réponse (a)**

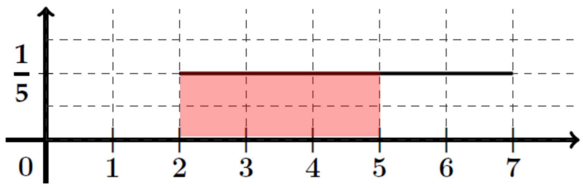
3. (a)



$P(3 \le X \le 7) = \frac{1}{5} \times (7-3) = \frac{4}{5} \neq \frac{1}{4}$

(b)





$P(X \ge 4)$ = $P(2 \le X \le 5)$ ➔ **Réponse (b)**

(c) $E(X) = \frac{7+2}{2} = \frac{9}{2} \neq \frac{9}{5}$

4. L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$
Donc l'amplitude de cet intervalle est $A = f + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = f + \frac{1}{\sqrt{n}} - f + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$

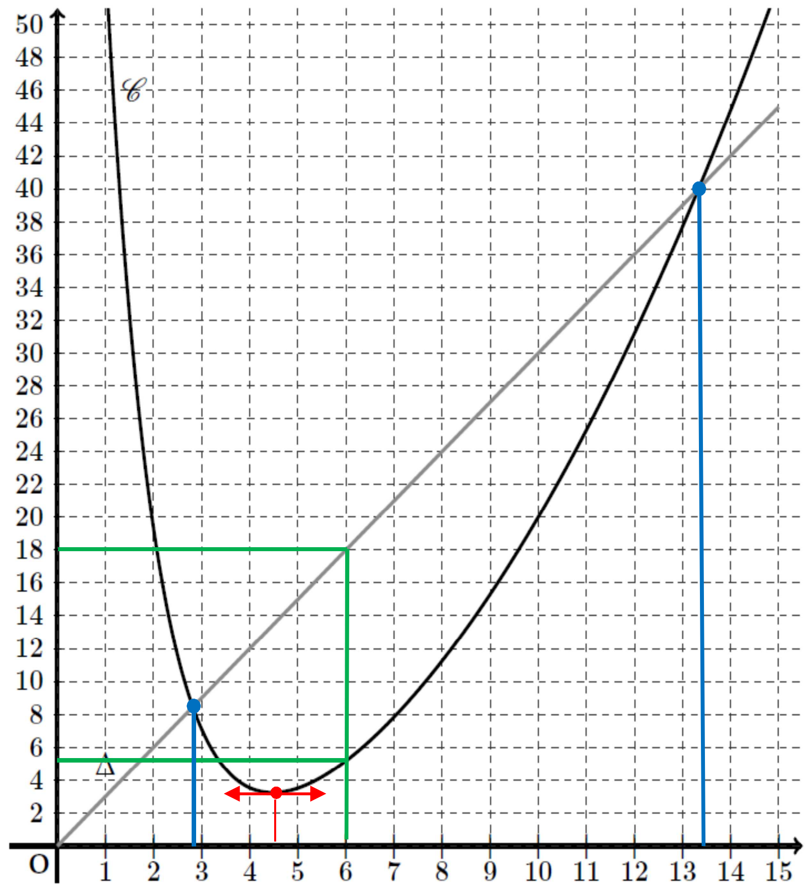
(a) Pour n = 5000, $A = \frac{2}{\sqrt{5000}} \approx 0{,}028 \neq 0{,}02$

(b) Pour n = 100, $A = \frac{2}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \neq 0{,}02$

(c) Pour n = 10 000, $A = \frac{2}{\sqrt{10\,000}} = \frac{2}{100} = 0{,}02$ ➔ **Réponse (c)**

Exercice 2

Partie A : Etude graphique



1. D'après la représentation graphique de C(x), le coût quotidien de l'entreprise est minimal pour une quantité de granulés d'environ 4,5 tonnes

2. (a) D'après la représentation graphique de C(x) , C(6) ≈ 5 et R(6) = 18
   Donc 6 tonnes de granulés coûtent environ 500€ et dégagent une recette de 1 800€
   Donc pour 6 tonnes de granulés vendus, le résultat net quotidien est D(6) ≈ 1 800 – 500 = 1 300€

   (b) L'entreprise dégage un résultat net positif lorsque D(x) > 0 c'est-à-dire R(x) – C(x) > 0 soit R(x) > C(x)
   D'après les représentations graphiques, R(x) > C(x) pour x compris environ entre 2,8 et 13,4
   Donc l'entreprise doit produire quotidiennement entre environ 2,8 tonnes et 13,4 tonnes de granulés pour dégager un résultat net positif.

Partie B

1. (a) Pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] on a $g(x) = -0{,}6x + 4 + e^{u(x)}$ avec $u(x) = -x + 5$ donc $u'(x) = -1$
   Donc $g'(x) = -0{,}6 + u'(x)e^{u(x)} = -0{,}6 + (-1)e^{-x+5}$
   Donc $g'(x) = -0{,}6 - e^{-x+5}$

   (b) On sait que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] $e^{-x+5} > 0$ donc $-e^{-x+5} < 0$
   Donc $-0{,}6 - e^{-x+5} < 0$
   Donc pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] $g'(x) < 0$
   Donc g est strictement décroissante sur l'intervalle [1 ; 15]

2. (a) On a $g(1) = -0{,}6 \times 1 + 4 + e^{-1+5} = -0{,}6 + 4 + e^{4} \approx 58$

$g(15) = -0{,}6 \times 15 + 4 + e^{-15+5} = -9 + 4 + e^{-10} \approx -5$

On en déduit alors le tableau de variations de f sur l'intervalle [1 ; 15]

x	1		15
g(x)	58	$\searrow$	-5

(b) Cherchons, par approches progressives, la valeur de α telle que g(α) = 0

Pour cela, on s'aide du tableau de valeurs de la fonction g, affiché par la calculatrice :

x	g(x)	
6	0,77 > 0	
7	- 0,06 < 0	donc α ∈ [6 ; 7]
6,9	0,0095 > 0	donc α ∈ [6,9 ; 7]
6,91	0,002 > 0	
6,92	- 0,005 < 0	donc α ∈ [6,91 ; 6,92] donc α est plus proche de 6,9 que de 7

Donc α ≈ 6,9

(c) On en déduit alors le tableau de signes de g(x) sur l'intervalle [1 ; 15] (avec une précision approchée à 0,1 près)

x	1		α ≈ 6,9		15
g(x)		+	0	-	

Partie C

1. On sait que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] $D(x) = R(x) - C(x) = 3x - (0{,}3x^2 - x + e^{-x+5})$

$= 3x - 0{,}3x^2 + x - e^{-x+5}$

Donc pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] $D(x) = -0{,}3x^2 + 4x - e^{-x+5}$

2. Pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 15] $D(x) = -0{,}3x^2 + 4x - e^{u(x)}$ avec $u(x) = -x + 5$ donc $u'(x) = -1$

Donc $D'(x) = -0{,}3 \times 2x + 4 - u'(x)e^{u(x)}$

$= -0{,}6x + 4 - (-1)e^{-x+5}$

$= -0{,}6x + 4 + e^{-x+5}$

Donc pour tout réel de l'intervalle [1 ; 15] $D'(x) = g(x)$

3. On a étudié à la question 2.(c) de la partie B le signe de g(x). On peut donc en déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle [1 ; 15] (avec une précision de 0,1)

x	1		α		15
D'(x)		+	0	-	
D(x)		$\nearrow$		$\searrow$	

4. (a) On a vu que D'(α) = g(α) = 0 , D'(x) > 0 pour x < α et D'(x) < 0 pour x > α

Donc la fonction D admet un maximum en x = α ≈ 6,9

Donc le bénéfice de l'entreprise est maximal pour une production d'environ 6,9 tonnes de granulés.

(b) On a $D(6{,}9) = -0{,}3 \times 6{,}9^2 + 4 \times 6{,}9 - e^{-6{,}9+5} \approx 41{,}73$

Donc pour une production de 6,9 tonnes de granulés, le bénéfice de l'entreprise sera d'environ 4 173€

Le bénéfice maximal de l'entreprise est donc de 4 173€

Exercice 3

Partie A

1. On sait que 49% des inscrits ont passé un baccalauréat général, donc $P(G) = \frac{49}{100} = 0{,}49$
   « 20% « « « technologique, donc $P(T) = \frac{20}{100} = 0{,}2$
   « 91,5% des candidats au baccalauréat général ont été reçus, donc $P_G(R) = \frac{91{,}5}{100} = 0{,}915$
   « 90,6% « « technologique « , donc $P_T(R) = \frac{90{,}6}{100} = 0{,}906$

2. La situation peut être traduite par l'arbre pondéré suivant (qu'on a complété au fur et à mesure des questions)

3. La probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat technologique et l'ait obtenu est
   $P(T \cap R) = P(T) \times P_T(R) = 0{,}2 \times 0{,}906 = 0{,}1812$

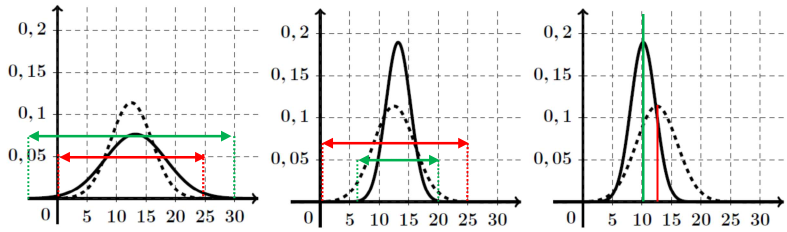
4. (a) La probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat professionnel et l'ait obtenu est $P(S \cap R)$
   Or $P(R) = P(G \cap R) + P(T \cap R) + P(S \cap R)$
   $P(G \cap R) = P(G) \times P_G(R) = 0{,}49 \times 0{,}915 = 0{,}44835$
   D'après l'énoncé, $P(R) = \frac{87{,}8}{100} = 0{,}878$
   Donc $P(S \cap R) = P(R) - P(G \cap R) - P(T \cap R)$
   $= 0{,}878 - 0{,}44835 - 0{,}1812$
   Donc $P(S \cap R) = 0{,}24845$

   (b) On a $P_S(R) = \frac{P(S \cap R)}{P(S)}$
   Or $P(S) = 1 - P(G) - P(T) = 1 - 0{,}49 - 0{,}2 = 0{,}31$
   Donc $P_S(R) = \frac{0{,}24845}{0{,}31} \approx 0{,}801$

Partie B

1. $P(9 \leq X_M \leq 16) = P(X_M \leq 16) - P(X_M \leq 9)$
   Pour un paramétrage de X_M à $\mu = 12{,}5$ et $\sigma = 3{,}5$ la calculatrice nous indique : $P(X_M \leq 16) \approx 0{,}84134474$
   $P(X_M \leq 9) \approx 0{,}15865525$
   Donc $P(9 \leq X_M \leq 16) \approx 0{,}84134474 - 0{,}15865525$
   Donc $P(9 \leq X_M \leq 16) \approx 0{,}683$

2. On sait que la moyenne de la variable X_F est $\mu = 13{,}2 > 12{,}5$ donc elle est supérieure à celle de X_M
   Or, dans le graphique 3, on voit que la moyenne de la variable représentée est inférieure à celle de X_M
   Donc ce n'est pas le graphique 3.
   On sait que l'écart-type de la variable X_F est $\sigma = 2{,}1 < 3{,}5$ donc il est inférieur à celui de X_M
   Donc cela veut dire que la représentation de X_F doit être moins « étendue » que celle de X_M
   Dans le graphique 1, la variable représentée est plus étendue que X_M
   Donc c'est le graphique 2 qui représente la variable X_F



Graphique 1 Graphique 2 Graphique 3

Exercice 4

1. (a) Le capital dû au 25 janvier 2016 est $u_0 = 5\,700$
   Le 25 février 2016, la capital restant dû augmente de 1,5% puis baisse de 300€
   Donc le capital restant dû au 26 février 2016 est $u_1 = u_0 + 0{,}015u_0 - 300 = (1 + 0{,}015)\,u_0 - 300$
   Donc $u_1 = 1{,}015u_0 - 300 = 1{,}015 \times 5700 - 300 = 5\,485{,}50$
   Donc le capital restant dû au 26 février 2016 est de 5 485,50€

   (b) Dans la même logique, $u_2 = 1{,}015u_1 - 300 = 1{,}015 \times 5485{,}5 - 300$
   Donc $u_2 = 5267{,}7825$

2. (a) Dans le tableau ci-dessous, on a arrondi les valeurs de u au dixième

Valeur de u	5 700	5485,5	5267,8	5046,7	4822,5	4594,8	4363,7
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
u > 4 500 (vrai/faux)	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

   (b) A la fin de l'exécution de cet algorithme, la valeur affichée sera « 6 »
   Cela veut dire que le capital restant dû est inférieur à 4500€ à partir du $6^{ème}$ mois

3. (a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 20000 = 1{,}015u_n - 300 - 20000 = 1{,}015u_n - 20300$
   Or pour tout entier naturel n, $1{,}015v_n = 1{,}015(u_n - 20000) = 1{,}015u_n - 1{,}015 \times 20000$
   $= 1{,}015u_n - 20300$
   Donc pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}015v_n$

   (b) On sait que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}015v_n$
   Donc (v_n) est géométrique de raison q = 1,015 et de premier terme $v_0 = u_0 - 20000 = 5700 - 20000 = -14300$
   Donc pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -14300 \times 1{,}015^n$
   Or pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 20000$
   Donc $u_n = v_n + 20000$
   Donc $u_n = -14300 \times 1{,}015^n + 20000$
   Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 20000 - 14300 \times 1{,}015^n$

4. (a) Entre le 26 janvier 2016 et le 26 avril 2017, il y a 15 mois
   Donc le capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est égal à u_{15}
   Or $u_{15} = 20000 - 14300 \times 1{,}015^{15} \approx 2121{,}68$
   Donc le capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est d'environ 2121,68€

   (b) Le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt est l'entier n à partir duquel $u_n < 0$
   On établit un tableau de valeurs de la suite u_n à l'aide de la calculatrice :

n	20	21	22	23
u_n	739,97	451,07	157,83	-139,7

   Donc il faut 23 mensualités pour rembourser intégralement le prêt

   (d) Comme le capital restant dû au début du $22^{ème}$ mois est inférieure à 300€, la dernière mensualité sera exactement égale au capital restant dû le $22^{ème}$ mois. Donc la dernière mensualité sera de 157,83€

   (e) La personne a donc versé 21 mensualités « régulières » de 300€ et la dernière mensualité de 157,83€
   Donc le coût total de son achat est C = 21 x 300 + 157,83 = 6 300 + 157,83 = 6457,83€

<u>Remarque</u> : le scooter coutait 5700€, donc le crédit a coûté 6457,83 – 5700 = 757,83€ à la personne ! Vous avez donc n aperçu « simplifié » du fonctionnement d'un crédit à la consommation. Réfléchissez bien avant de vous engager !