France métropolitaine 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n + 3.$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \text{ et } T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

