Sujets

novembre 2012 **Nouvelle-Calédonie**

novembre 2012 **Amérique du Sud**

juin 2012 **Antilles-Guyane**

juin 2012 **Polynésie**

↓ **Formulaire**

↑ **Nouvelle-Calédonie novembre 2012 . EXERCICE 1** →

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x+3) - x$

1. a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe

b) Montrer que pour tout $x > 0$: $f(x) = x\left(5\,\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$
En déduire la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$

c) Dresser le tableau de variations de f

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0\,;+\infty[$
Donner un encadrement à 10^{-2} près de cette solution.

b) En déduire le signe de f sur $[0\,;+\infty[$

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = 4 \\ u_{n+1} & = 5\ln(u_n + 3) \end{cases}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 5\ln(x+3)$
En annexe, on a tracé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = g(x)$

1. a) Construire les termes u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses de la figure donnée en annexe : on utilisera la droite et la courbe tracées sur cette figure et on laissera les traits de construction apparents.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n)

2. a) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$

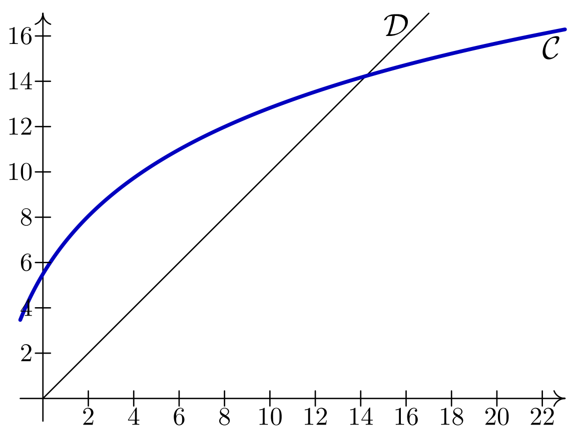
b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la question 2. a) de la **partie A**

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq \alpha$

d) Démontrer la conjecture faite à la question 1. b) de la **partie B**

Justifier que $\lim u_n = \alpha$ en utilisant la question 2. a) de la **partie A**

$\boxed{\text{Figure}}$



↑ **Amérique du Sud novembre 2012 . EXERCICE 3** →

Au cours d'une séance de tennis, un joueur s'entraîne à faire des services.
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

R_n : « *le joueur a réussi le n-ième service* »

et $\overline{R_n}$ l'événement contraire.
Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.
La probabilité qu'il réussisse le premier service est 0,7 .

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :
- si le joueur réussit le n-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8
- si le joueur ne réussit pas le n-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de services réussis.

a) Déterminer la loi de probabilité de X (on pourra s'aider d'un arbre de probabilités)

b) Calculer l'espérance mathématique de X

2. On s'intéresse maintenant au cas général.

a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $x_{n+1} = 0,1\,x_n + 0,7$

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 9x_n - 7$

a) Déterminer la nature de la suite (u_n)

b) En déduire la limite de la suite (x_n)

↑ **Antilles-Guyane juin 2012 . EXERCICE 3** →

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n > 0$ par :

$$\begin{cases} u_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{2n}\,u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 .

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera sa raison et son premier terme v_1

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

b) En déduire la limite de (u_n)

↑ **Polynésie juin 2012 . EXERCICE 3** →

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

1. Calculer u_1 et u_2

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n \geq n$

b) En déduire la limite de (u_n)

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - n + 1$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique

b) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 3^n + n - 1$

5. Soit p un entier naturel non nul .

a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$: $u_n \geq 10^p$

b) Justifier que $n_0 \leq 3p$

c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$

Nouvelle-Calédonie novembre 2012 . EXERCICE 1 ←

Partie A

1. **a)** Utiliser la dérivée de $\ln u$ pour calculer $f'(x)$
   $f'(x)$ est du signe de $2 - x$

   b) On peut par exemple développer l'expression de l'énoncé et regrouper les deux logarithmes puis simplifier.
   La limite est $-\infty$

   c) La fonction f admet un maximum en $x = 2$

2. **a)** Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et encadrer α par balayage.
   On doit vérifier $14,2 < \alpha < 14,3$

   b) Le signe de f se déduit des variations.

Partie B

1. **a)** Placer u_0 et tracer successivement une droite verticale vers $\mathcal{C}$ puis une droite horizontale vers $\mathcal{D}$

   b) Croissante ou décroissante ?

2. **a)** Montrer que la fonction g est strictement croissante

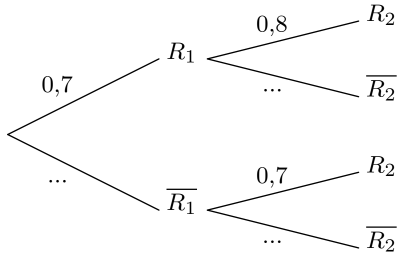
   b) Écrire $f(\alpha) = 0$ et transformer l'égalité obtenue.

   c) L'hérédité se prouve en utilisant g croissante et $g(\alpha) = \alpha$

   d) Démonstration par récurrence entièrement analogue à celle de la question précédente.
   Montrer d'abord que (u_n) converge vers un réel ℓ.
   Vérifier ensuite $\ell = g(\ell)$ et conclure.

Amérique du Sud novembre 2012 . EXERCICE 3 ←

1. a) On décrit la situation par un arbre :

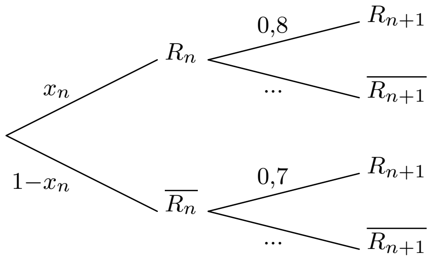


Calculer $p(X = 2)$ sachant que cet événement n'est autre que $R_1 \cap R_2$
Calculer $p(X = 0)$ sachant que cet événement n'est autre que $\overline{R_1} \cap \overline{R_2}$
Terminer avec $p(X = 1)$.

b) Vérifier $E(X) = 1,47$

2. a) L'énoncé donne les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$

b) On décrit de nouveau le cas général par un arbre :



Appliquer la formule des *probabilités totales* .

3. a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,1$

b) Calculer d'abord u_n en fonction de n puis montrer $\lim u_n = 0$
Calculer finalement $\lim x_n$ (le résultat est 7/9)

Antilles-Guyane juin 2012 . EXERCICE 3 ←

1. On trouve respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{4}$.

2. a) Démonstration par récurrence sans problème.

b) Montrer que le rapport de deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est inférieur à 1.

c) La suite étant décroissante et positive, ...

3. a) Vérifier $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$

b) Calculer d'abord v_n en fonction de n .
Calculer ensuite u_n en fonction de n .

4. a) Mettre x en facteur et utiliser les résultats sur la *croissance comparée*.

b) Vérifier $\ln u_n = f(n)$, ce qui implique $u_n = e^{f(n)}$ et calculer la limite.

Polynésie juin 2012 . EXERCICE 3 ←

1. On trouve respectivement 3 et 10 .

2. **a)** L'hérédité se montre en prouvant que

$$u_n \geq n \text{ implique } u_{n+1} \geq n+3$$

ce qui est suffisant car $n+3$ est plus grand que $n+1$

b) Appliquer l'un des théorèmes de *comparaison* (on dit également des *gendarmes*)

3. Montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est positive.

4. **a)** Vérifier $v_{n+1} = 3\,v_n$

b) Calculer d'abord v_n en fonction de n .
En déduire u_n en fonction de n .

5. **a)** Calculer la limite de (u_n) et conclure.

b) Calculer u_{3p} et vérifier que l'expression obtenue est toujours plus grande que 10^p

c) Calculer u_n jusqu'à $n = 9$: donner le rang du premier terme qui dépasse $1000 = 10^3$

↑

Formulaire

Suites arithmétiques

définition	$u_{n+1} = u_n + r$
calcul du terme de rang n	$u_n = u_0 + n\,r$ ou $u_n = u_1 + (n-1)\,r$
somme des termes consécutifs	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \dfrac{(u_p + u_n) \times N}{2}$ où $N = n - p + 1$ est le nombre de termes de la somme

Suites géométriques

définition	$u_{n+1} = q\,u_n$
calcul du terme de rang n	$u_n = u_0\,q^n$ ou $u_n = u_1\,q^{n-1}$
somme des termes consécutifs	$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p\,\dfrac{1-q^N}{1-q}$ où $N = n - p + 1$ est le nombre de termes de la somme

Limites

suite convergente	suite qui a pour limite un nombre réel
suite divergente	suite qui n'a pas de limite ou qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$
convergence monotone	une suite croissante et majorée converge une suite décroissante et minorée converge
unicité de la limite	la limite d'une suite -si elle existe- est unique

opérations

$\lim_n v$ \ $\lim_n u$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	`IND`
$-\infty$	$-\infty$	`IND`	$-\infty$

limite d'une somme

$\lim_n v$ \ $\lim_n u$	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \cdot \ell'$	0	$\pm\infty(*)$
0	0	0	`IND`
$\pm\infty$	$\pm\infty(*)$	`IND`	$\pm\infty(*)$

limite d'un produit

(*) appliquer la règle des signes

$\lim_n u_n$	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$	0^+	0^-
$\lim_n \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	`IND`	0	$+\infty$	$-\infty$

limite de l'inverse

cas d'indétermination	$\infty - \infty \quad \infty \times 0 \quad \dfrac{1}{0} \quad \dfrac{0}{0} \quad \dfrac{\infty}{\infty}$

Limites et relation d'ordre

théorèmes de *comparaison* ou des *gendarmes*	si $u_n \leq v_n$ et si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$ si $u_n \leq v_n$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$ si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim u_n = \lim w_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim v_n = l$
passage à la limite dans une inégalité	si $u_n \leq v_n$ et si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$
passage à la limite dans une égalité	si $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue et si u_n converge vers ℓ, alors $\ell = f(\ell)$

Limites de suites géométriques

suites convergentes	si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
suites divergentes vers l'infini	si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
suites divergentes sans avoir de limite	la suite alternée $(-1)^n$ est une suite qui n'a pas de limite elle ne tend ni vers un réel, ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$