Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) a) $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3\ln(1) = 0$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3\ln(x) = -\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = -\infty$.

b) La fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 2x + \frac{3}{x}.$$

La fonction φ' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Par suite, pour $0 < x < 1$, on a $\varphi(x) < \varphi(1)$ ou encore $\varphi(x) < 0$ et pour $x > 1$, on a $\varphi(x) > \varphi(1)$ ou encore $\varphi(x) > 0$.
La fonction φ est strictement négative sur $]0,1[$, strictement positive sur $]1,+\infty[$ et s'annule en 1.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x-2\right) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} -3\ln(x) = +\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x-2-3\ln x\right) = +\infty$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x-2-3\ln x\right)\times\frac{1}{x} = +\infty$.

Pour tout réel strictement positif x, $f(x) = x-2-\frac{2}{x}-3\frac{\ln x}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -3\frac{\ln x}{x} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(2x-2-\frac{3}{x}\right)x - \left(x^2-2x-2-3\ln x\right)\times 1}{x^2} = \frac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2-1+3\ln x}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$. Avec le résultat de la question 1)b), on peut dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

c) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[f(1), \lim\limits_{x\to 0} f(x)\right[= [-3,+\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0,1]$. En particulier, puisque $0 \in [-3,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]0,1]$, solution notée α.

La calculatrice fournit $f(0,41) = 0,05\ldots > 0$ $f(0,42) = -0,14\ldots < 0$. Donc, $f(0,41) > f(\alpha) > f(0,42)$. Puisque f est strictement décroissante sur $]0,1]$, on en déduit que $0,41 < \alpha < 0,42$. Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est $0,41$.

d) La fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}\times 2x - 2 - 2\times\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln x = x-2-\frac{2}{x}-\frac{3\ln x}{x} \\ &= \frac{x^2-2x-2-3\ln x}{x} = f(x). \end{aligned}$$

Donc, la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

Partie B

$\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de la fonction $-f$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Puisque la fonction $-f$ est positive sur $[\alpha, \beta]$, l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}'$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = \beta$ d'autre part, est

$$\int_{\alpha}^{\beta} -f(x)\ dx = [-F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\alpha) - F(\beta).$$

Par symétrie, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = \beta$ est $2(F(\alpha) - F(\beta))$. L'unité d'aire est égale à 2 cm^2 et donc l'aire, exprimée en cm^2, du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est égale à $2 \times 2(F(\alpha) - F(\beta))$. Le volume d'un palet en cm^3 est

$$0,5 \times 4(F(\alpha) - F(\beta)) = 2(F(\alpha) - F(\beta)).$$

Enfin, le volume total de pâte, en cm^3, pour confectionner 80 palets est

$$V = 80 \times 2(F(\alpha) - F(\beta)) = 160(F(\alpha) - F(\beta)).$$

En prenant $\alpha = 0,41$ et $\beta = 3,61$, la calculatrice fournit $V = 895,6\ldots$ cm^3 ou encore $0,9$ litre arrondi à 10^{-2}. La contrainte de rentabilité est donc respectée.

