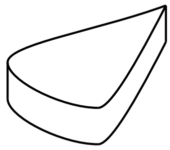
Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.
Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

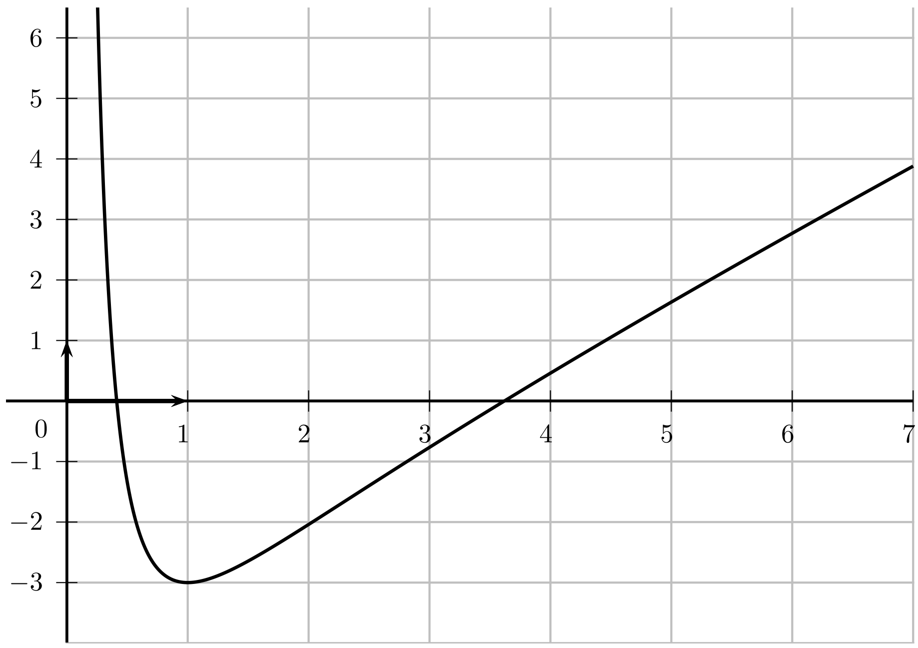


Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1) Soit φ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

a) Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b) Etudier les variations de φ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que sur $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
En déduire le tableau de variation de f.

c) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1\ ;\ +\infty[$ avec $\beta \approx 3,61$ à 10^{-2} près.

d) Soit F la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : résolution du problème

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} *près de* α *et* β *de la partie* ***A***.

Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ ainsi que son symétrique $\mathscr{C}'$ par rapport à l'axe des abscisses.

Les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de $0,5$ cm. Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?

