Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le coefficient directeur de la tangente (T_f) à $\mathcal{C}_f$ en M est $f'(a)$ ou encore e^a . Le coefficient directeur de la tangente (T_g) à $\mathcal{C}_g$ en N est $g'(a)$ ou encore $-e^{-a}$.

Le produit de ces coefficients directeurs est

$$f'(a) \times g'(a) = e^a \times (-e^{-a}) = -e^0 = -1.$$

On en déduit que les deux tangentes sont perpendiculaires.

2) a) Il semblerait que la longueur PQ soit constante, égale à 2, quand a varie.

b) Une équation de (T_f) en M est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ ou encore $y = e^a + e^a(x - a)$. Une équation de (T_g) est $y = g(a) + g'(a)(x - a)$ ou encore $y = e^{-a} - e^{-a}(x - a)$.

P est le point de (T_f) d'ordonnée nulle. Donc, $e^a + e^a(x_P - a) = 0$ puis $e^a(1 + (x_P - a)) = 0$ puis $1 + x_P - a = 0$ (car $e^a \neq 0$) et finalement $x_P = a - 1$.

Q est le point de (T_g) d'ordonnée nulle. Donc, $e^{-a} - e^{-a}(x_Q - a) = 0$ puis $e^{-a}(1 - (x_Q - a)) = 0$ puis $1 - x_Q + a = 0$ et finalement $x_Q = a + 1$.

Donc, $PQ = |x_Q - x_P| = |(a + 1) - (a - 1)| = |a + 1 - a + 1| = 2$.