

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A : étude d'un cas particulier

1) La fonction C est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel positif t ,

$$C'(t) = 12 \times \left(- \left(-\frac{7}{80} e^{-\frac{7}{80}t} \right) \right) = \frac{21}{20} e^{-\frac{7}{80}t}.$$

La fonction C' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction C est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{7}{80}t} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 12(1 - 0) = 12$. Le traitement de ce patient n'est pas efficace.

Partie B : étude de fonctions

1) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 105 \left(-\frac{1}{x^2} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x} \right) + \frac{1}{x} \left(- \left(-\frac{3}{40} e^{-\frac{3}{40}x} \right) \right) \right) \\ &= 105 \left(\frac{-1 + e^{-\frac{3}{40}x}}{x^2} + \frac{\frac{3}{40} e^{-\frac{3}{40}x}}{x} \right) = \frac{105}{x^2} \left(-1 + e^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3}{40} x e^{-\frac{3}{40}x} \right) \\ &= \frac{105g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

2) La fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et $g(0) = 0$. Donc, pour tout x de $]0, +\infty[$, $g(x) < 0$. On en déduit que pour tout x de $]0, +\infty[$, $\frac{105g(x)}{x^2} < 0$ ou encore que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) < 0$. La fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

3) $f(1) = 105 \left(1 - e^{-\frac{3}{40}} \right) = 7,7 \dots$ et donc $f(1) > 5,9$. $f(80) = \frac{105}{80} (1 - e^{-6}) = 1,3 \dots$ et donc $f(80) < 5,9$.

f est continue et strictement décroissante sur $[1, 80]$. On sait que pour tout réel k de l'intervalle $[f(80), f(1)]$, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans l'intervalle $[1, 80]$. Puisque $5,9$ appartient à l'intervalle $[f(80), f(1)]$, l'équation $f(x) = 5,9$ a une solution et une seule dans l'intervalle $[1, 80]$.

Si $0 < x < 1$, puisque f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $f(x) > f(1) > 5,9$ et en particulier, $f(x) \neq 5,9$. Si $x > 80$, $f(x) < f(80) < 5,9$ et en particulier, $f(x) \neq 5,9$. Ceci montre que l'équation $f(x) = 5,9$ a une solution et une seule dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et de plus cette solution, notée α , appartient à l'intervalle $[1, 80]$.

La calculatrice fournit $f(8,1) = 5,901 \dots$ et $f(8,2) = 5,88 \dots$. Donc, $f(8,1) > 5,9 > f(8,2)$. Puisque f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $8,1 < \alpha < 8,2$. Ainsi, $\alpha = 8,1$ à 10^{-1} près par défaut.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1) a) $C(6) = \frac{105}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80} \times 6} \right) = \frac{105}{a} \left(1 - e^{-\frac{3a}{40}} \right) = f(a).$

b) $C(6) = 5,9 \Leftrightarrow f(a) = 5,9 \Leftrightarrow a = \alpha$. Une valeur approchée à 10^{-1} près de la clairance est $8,1$ litres par heure.

2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \frac{d}{a}(1 - 0) = \frac{d}{a}$. Ensuite, $\frac{d}{a} = 15 \Leftrightarrow d = 15a$. Pour un débit de $121,5$ micromoles par heure, le traitement du patient est efficace.