Asie 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

Question préliminaire.

$$P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a}$$

puis

$$P(T > a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}.$$

Partie A : étude d'un exemple

1) $P(T \geqslant 180) = P(T > 180) = e^{-\frac{1}{2800}\times 180} = 0,938$ arrondie au millième.

2) La loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{T>180}(T > 180 + 180) = P(T > 180) = 0,938 \text{ arrondie au millième.}$$

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Ici, $n = 400$ et on fait l'hypothèse que $p = 94\%$. On note que $np = 376$ et $n(1-p) = 24$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,94 - 1,96\sqrt{\frac{0,94\times 0,06}{400}}; 0,94 + 1,96\sqrt{\frac{0,94\times 0,06}{400}}\right] = [0,916; 0,964]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{400-32}{400} = \dfrac{368}{400} = 0,92$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas remettre en cause l'affirmation du fabricant.

Partie C : dans une salle de spectacle

1) La calculatrice fournit $P(X > 445) = 0,247$ arrondie à 10^{-3}.

2) Soit a le nombre d'ampoules en stock. Le nombre d'ampoules en bon état au bout d'un an est X et donc le nombre d'ampoules défectueuses au bout d'un an est $500 - X$. Le stock est suffisant pour changer toutes les ampoules défectueuses si et seulement si $a \geqslant 500 - X$ ou encore $X \geqslant 500 - a$. Donc, on cherche a tel que $P(X \geqslant 500 - a) \geqslant 0,95$. De plus,

$$P(X \geqslant 500 - a) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X \leqslant 500 - a) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow P(X \leqslant 500 - a) \leqslant 0,05.$$

Déterminons d'abord a tel que $P(X \leqslant 500 - a) = 0,05$. La calculatrice fournit $500 - a = 427$ arrondi à l'unité inférieure ou encore $a = 73$ arrondi à l'unité supérieure.

Donc, la taille minimale du stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95% est 73.

