Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A : administration par voie intraveineuse

1) Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{2} \times 20 \Leftrightarrow 20e^{-0,1t} = \frac{1}{2} \times 20 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,1t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow -0,1t = -\ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{1}{0,1} \ln(2) \Leftrightarrow t = 10 \ln(2). \end{aligned}$$

Donc, $t_{0,5} = 10 \ln(2) = 6,9$ heures arrondi au dixième.

2) Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(t) \leq 0,2 \Leftrightarrow 20e^{-0,1t} \leq 0,2 \Leftrightarrow e^{-0,1t} \leq 0,01 \\ \Leftrightarrow -0,1t \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ \Leftrightarrow -0,1t \leq -\ln(100) \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{0,1} \ln(100) \Leftrightarrow t \geq 10 \ln(100). \end{aligned}$$

Donc, le médicament est éliminé à partir de $t_e = 10 \ln(100) = 46,1$ heures arrondi au dixième.

3) Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^x 20e^{-0,1t} dt = 20 \left[-\frac{1}{0,1} e^{-0,1t} \right]_0^x = 20 \left((-10e^{-0,1x}) - (-10e^0) \right) = 200 - 200e^{-0,1x}.$$

Ensuite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,1x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x 20e^{-0,1t} dt = 200 - 0 = 200$.

Pour ce modèle, l'ASC est égal à $200 \mu\text{g.L}^{-1}\cdot\text{h}$.

Partie B : administration par voie orale

1) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $t \geq 0$,

$$g'(t) = 20 \left((-0,1)e^{-0,1t} - (-1)e^{-t} \right) = 20 \left(e^{-t} - 0,1e^{-0,1t} \right) = 20e^{-t} \left(1 - 0,1e^{-0,1t+t} \right) = 20e^{-t} \left(1 - 0,1e^{0,9t} \right).$$

2) Soit $t \geq 0$. $20e^{-t} > 0$ et donc

$$\begin{aligned} g'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - 0,1e^{0,9t} > 0 \Leftrightarrow -0,1e^{0,9t} > -1 \Leftrightarrow e^{0,9t} < \frac{1}{0,1} \Leftrightarrow e^{0,9t} < 10 \\ \Leftrightarrow 0,9t < \ln(10) \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow t < \frac{1}{0,9} \ln(10) \Leftrightarrow t < \frac{10}{9} \ln(10). \end{aligned}$$

De même, $g'(t) < 0$ si et seulement si $t > \frac{10}{9} \ln(10)$ et $g'(t) = 0$ si et seulement si $t = \frac{10}{9} \ln(10)$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{10}{9} \ln(10)\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{10}{9} \ln(10), +\infty\right[$.

Donc, la concentration est maximale pour $t = \frac{10}{9} \ln(10)$ ou encore $t = 2,5584\dots$ h ou encore 2 h et $60 \times 0,5584\dots$ min ou enfin 2 h 34 min arrondi à la minute.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

1) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

- $40 - 40 \times 0,5^1 = 40 - 20 = 20 = u_1$. Donc, l'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 0,5u_n + 20 \\
&= 0,5(40 - 40 \times 0,5^n) + 20 = 20 - 0,5 \times 40 \times 0,5^n + 20 = 40 - 40 \times 0,5^{n+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

2) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 40 - 0 = 40$.

3) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
u_n \geq 38 &\Leftrightarrow 40 - 40 \times 0,5^n \geq 38 \Leftrightarrow -40 \times 0,5^n \geq -2 \Leftrightarrow 0,5^n \leq \frac{1}{20} \\
&\Leftrightarrow \ln(0,5^n) \leq \ln\left(\frac{1}{20}\right) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \ln(0,5) \leq -\ln(20) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -\ln(20) \Leftrightarrow -n \ln(2) \leq -\ln(20) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(20)}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \geq 4,3\dots \\
&\Leftrightarrow n \geq 5.
\end{aligned}$$

Le nombre minimal d'injections pour atteindre l'équilibre est 5.