France métropolitaine 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Pour tout réel $x > 0$, $h(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

2) La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$h'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$

Pour tout réel positif x, $e^{-x} > 0$ et donc $h'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variations de la fonction h.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3) a) Pour tout réel positif x, $h'(x) = e^{-x}(1 - x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - h(x)$ et donc $h(x) = e^{-x} - h'(x)$.

b) Une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.

c) Une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction h' est la fonction h et donc, d'après la question a), une primitive H de la fonction h sur $[0, +\infty[$ est la fonction définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par

$$H(x) = -e^{-x} - h(x) = -e^{-x} - xe^{-x} = -(x + 1)e^{-x}.$$

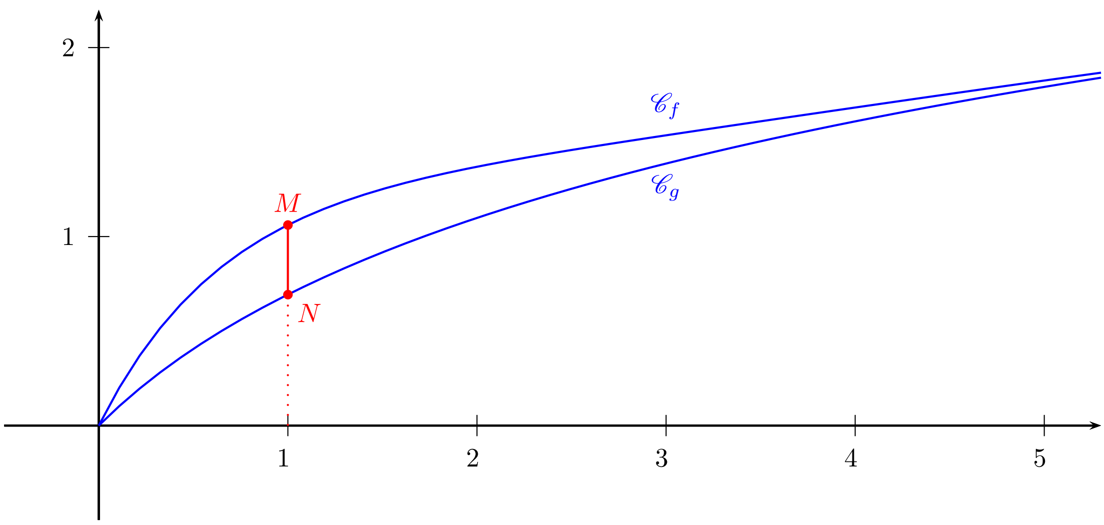
Partie B

1) a) Pour $x \geqslant 0$, $y_M - y_N = f(x) - g(x) = xe^{-x} \geqslant 0$. Donc, pour $x \geqslant 0$,

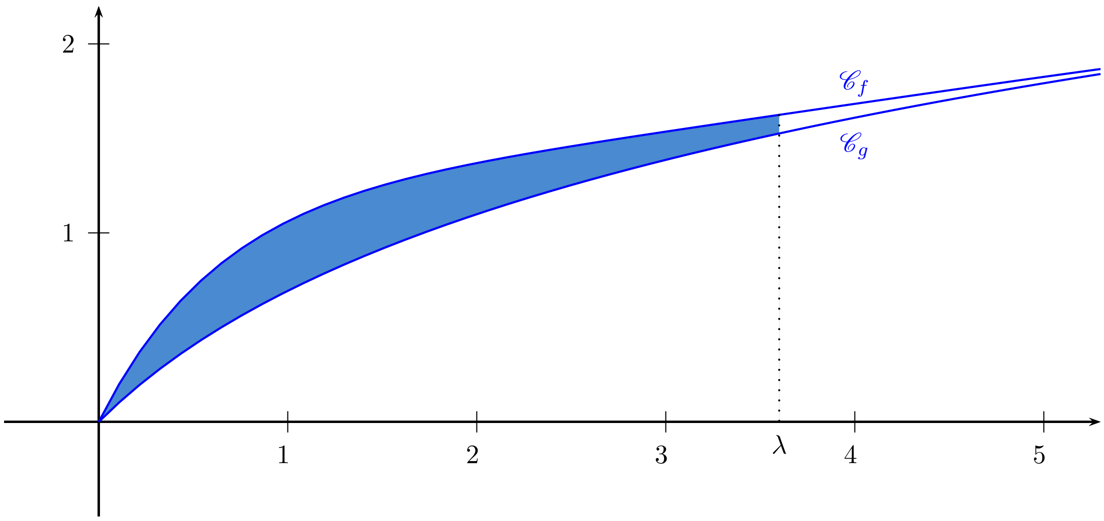
$$MN = |y_N - y_M| = y_M - y_N = xe^{-x} = h(x).$$

D'après la partie A, la distance MN est maximale pour $x = 1$ et cette distance maximale est $h(1) = \dfrac{1}{e}$.

b) Graphique.



2) a) Graphique.



b) Soit $\lambda \geqslant 0$. Pour tout réel x de $[0, \lambda]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$ et donc, d'après la question 3.c) de la partie A,

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \int_0^\lambda (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^\lambda h(x)\, dx = [H(x)]_0^\lambda = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^\lambda \\ &= \left(-(\lambda+1)e^{-\lambda}\right) - \left(-(0+1)e^0\right) = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 \\ &= 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}. \end{aligned}$$

c) Pour tout $\lambda \geqslant 0$, $A_\lambda = 1 - \dfrac{\lambda}{e^\lambda} - \dfrac{1}{e^\lambda} = 1 - h(\lambda) - e^{-\lambda}$. $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} h(\lambda) = 0$ d'après la question 1 de la partie A et d'autre part, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda = 1 - 0 - 0 = 1.$$

Ceci signifie que l'aire du domaine infini du plan compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ a une aire égale à 1.

3) a) La calculatrice fournit $A_\lambda < 0,8$ pour $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ et $A_3 = 1 - \dfrac{4}{e^3} = 0,8008\ldots$ et donc $A_3 \geqslant 0,8$. L'algorithme affiche donc 3.

b) L'algorithme affiche la première valeur entière de λ pour laquelle $A_\lambda \geqslant S$, S étant un réel strictement compris entre 0 et 1 donné.

