Liban 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) Pour $x \in]0,1[$, on pose $u(x) = \dfrac{20x}{1-x}$. Pour $x \in]0,1[$, $20x > 0$ et $1-x > 0$ et donc $u(x) = \dfrac{20x}{1-x} > 0$. Ainsi, la fonction u est dérivable et strictement positive sur $]0,1[$. Puisque pour tout réel x de $]0,1[$, $f(x) = 30\ln(u(x))$, la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout réel x de $]0,1[$,

$$f'(x) = 30\frac{u'(x)}{u(x)} = 30 \times 20 \times \frac{1\times(1-x) - x\times(-1)}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\dfrac{20x}{1-x}} = 30\times 20 \times \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{20x} = \frac{30}{x(1-x)}.$$

Pour tout réel x de $]0,1[$, $x > 0$ et $1-x > 0$. Donc, pour tout réel x de $]0,1[$, $x(1-x) > 0$ puis $f'(x) > 0$. On a montré que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.

2) Soit $x \in]0,1[$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = a &\Leftrightarrow 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = a \Leftrightarrow \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) = \frac{a}{30} \\ &\Leftrightarrow \frac{20x}{1-x} = e^{\frac{a}{30}} \Leftrightarrow 20x = e^{\frac{a}{30}} - xe^{\frac{a}{30}} \\ &\Leftrightarrow x\left(20 + e^{\frac{a}{30}}\right) = e^{\frac{a}{30}} \Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{a}{30}}}{20 + e^{\frac{a}{30}}}. \end{aligned}$$

En particulier, $f(x) = 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{\frac{20}{30}}}{20 + e^{\frac{20}{30}}} \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}}$ et $f(x) = 120 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^{\frac{120}{30}}}{20 + e^{\frac{120}{30}}} \Leftrightarrow x = \dfrac{e^4}{20 + e^4}$.

Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$, pour $x \in]0,1[$,

$$20 \leqslant f(x) \leqslant 120 \Leftrightarrow f\left(\frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{e^4}{20+e^4}\right) \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} \leqslant x \leqslant \frac{e^4}{20+e^4}.$$

On note que $\dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} = 0,09$ à 10^{-2} près par excès et $\dfrac{e^4}{20+e^4} = 0,73$ à 10^{-2} près par défaut. Donc, l'âge reste dans les conditions de validité pour un diamètre de tronc compris au sens large entre 8 cm et 73 cm.

Partie B

1) a) Le nombre $0,245$ écrit dans la cellule D3 est le résultat du calcul : $\dfrac{18,05 - 15,6}{80-70}$ qui est la croissance de la hauteur du tronc, exprimée en mètres, divisée par la durée, exprimée en année.

b) Dans la case C3, on doit rentrer la formule $= \dfrac{C2 - B2}{C1 - B1}$.

2) Un diamètre de 27 cm est modélisé par $x = 0,27$. L'âge de l'épicéa, exprimé en années, est alors

$$f(0,27) = 30\ln\left(\frac{20\times 0,27}{1-0,27}\right) = 30\ln\left(\frac{540}{73}\right) = 60,033\ldots$$

soit environ 60 ans.

Soit h la hauteur de l'arbre, exprimée en mètres, quand l'arbre a 60 ans. La hauteur de l'arbre est de 11,2 m à 50 ans et 15,6 à 70 ans. En supposant la vitesse de croissance constante sur cette période, on a $\dfrac{h - 11,2}{60-50} = 0,22$ et donc $h = 11,2 + 10\times 0,22 = 13,4$.

La hauteur d'arbre attendue est de $13,4$ mètres.

3) a) Tableau complété.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Ages (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par années)		0,22	0,245	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,1675

La vitesse de croissance est maximale pour un âge compris entre 80 et 95 ans.

b) $f(0,7) = 30\ln\left(\dfrac{20\times 0,7}{0,3}\right) = 30\ln\left(\dfrac{140}{3}\right) = 115,2\ldots$ Le diamètre est de 70 cm quand l'âge est environ 115 ans. Cet âge n'est pas compris entre 80 et 95 ans et le bois sera donc de moins bonne qualité. Il n'est pas cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm.

