Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Si $x \in [-2,5;2,5]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2,5^2$ ou encore $0 \leqslant x^2 \leqslant 6,25$ puis $-12,5 \leqslant -2x^2 \leqslant 0$ et enfin $1 \leqslant -2x^2+13,5 \leqslant 13,5$. En particulier, si $x \in [-2,5;2,5]$, alors $-2x^2+13,5 > 0$.

f est de la forme $x \mapsto \ln(u(x))$ avec $u(x) = -2x^2+13,5$. D'après ce qui précède, pour tout x de $[-2,5;2,5]$, $u(x) > 0$. Donc, f est dérivable sur $[-2,5;2,5]$ et pour tout x de $[-2,5;2,5]$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-4x}{-2x^2+13,5}.$$

2) Pour $x \in [-2,5;2,5]$, $-2x^2+13,5 > 0$. Donc, pour $x \in [-2,5;2,5]$, $f'(x)$ est du signe de $-4x$ ou encore du signe de $-x$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $[-2,5;0[$ et strictement négative sur $]0;2,5]$ puis la fonction f est strictement croissante sur $[-2,5;0]$ et strictement décroissante sur $[0,;2,5]$. De plus, $f(-2,5) = f(2,5) = \ln(-2\times 2,5^2+13,5) = \ln(1) = 0$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-2,5$		0		$2,5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\ln(13,5)$	$\searrow$	0

Puisque f est croissante sur $[-2,5;0]$, si $-2,5 \leqslant x \leqslant 0$, alors $f(x) \geqslant f(-2,5)$ ou encore $f(x) \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f est positive sur $[-2,5;0]$. De même, la fonction f est positive sur $[0;2,5]$ et finalement sur $[-2,5;2,5]$.

Partie B

1) Soient A et B les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $2,5$ et 0. A a donc pour coordonnées $(2,5;0)$ et B a pour coordonnées $(0;\ln(13,5))$. Donc, $OA = 2,5$ et $OB = \ln(13,5)$ avec $\ln(13,5) = 2,6\ldots$
On a $OA \neq OB$ et donc, la courbe $\mathscr{C}$ n'est pas un arc de cercle de centre O.

2) On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$. Puisque la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire de $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire est le double de celle de la partie de $\mathscr{D}$ située à droite de l'axe (Oy).

Puisque la fonction f est positive sur $[0;2,5]$, cette aire exprimée en unités d'aire est égale à $2\int_0^{2,5} f(x)\,dx$. Enfin, l'unité de longueur est de 2m et donc l'unité d'aire est égale à 4m^2. Finalement, l'aire de $\mathscr{D}$, exprimée en m^2, notée $\mathscr{A}$ est

$$\mathscr{A} = 4\times 2\int_0^{2,5} f(x)\,dx = 8\int_0^{2,5} f(x)\,dx.$$

3) a) Tableau complété

La case située ligne $k = 1$, colonne R, est $R = \dfrac{2,5}{50} f\left(\dfrac{2,5}{50}\right) = 0,130\,115$ puis en colonne S, $S = 0 + R = 0,130\,115$.

En ligne $k = 4$, la colonne R contient $\dfrac{2,5}{50} f\left(\dfrac{2,5}{50}\times 4\right) = 0,129\,837$. En colonne S, on écrit le résultat de $0,390\,144 + 0,129\,837$ soit $0,519\,981$.

k	R	S
1	$0,130\,115$	$0,130\,115$
2	$0,130\,060$	$0,260\,176$
3	$0,129\,968$	$0,390\,144$
4	$0,129\,837$	$0,519\,981$
$\vdots$		$\vdots$
24	$0,118\,137$	$3,025\,705$
25	$0,129\,837$	$3,142\,675$
$\vdots$		$\vdots$
49	$0,020\,106$	$5,197\,538$
50	0	$5,197\,538$

L'algorithme affiche $S = 5,197\,538$.

b) On prend donc $a = 5,197\,538$. On a $\dfrac{f(0)-f(2,5)}{n} = \dfrac{\ln(13,5)}{50}$. D'après l'énoncé,

$$5,197\,538 \leqslant I \leqslant 5,197\,538 + 2,5\frac{\ln(13,5)}{50},$$

et donc, puisque $\mathscr{A} = 8I$,

$$8 \times 5,197\,538 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8 \times \left(5,197\,538 + 2,5\frac{\ln(13,5)}{50}\right),$$

et donc

$$41,580\,304 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 42,621\,380.$$

L'aire de la zone de creusement est donc 42m^2 au m^2 près.

