Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.

2) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

3) Étudier les variations de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1) Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

