Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord 28 mai 2019

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.**

Solution : On cherche $p(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65)$

D'après la calculatrice $p(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65) \approx 0{,}968$ à 10^{-3} près.

b.

Solution : On veut que $p(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65) = 0{,}98$.

$1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65 \iff -0{,}15 \leqslant X_1 - 1{,}5 \leqslant 0{,}15 \iff \dfrac{-0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0{,}15}{\sigma_1}$

Alors $p(1{,}35 \leqslant X \leqslant 1{,}65) = 0{,}98 \iff p\left(\dfrac{-0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}98$

On a, par symétrie, $p\left(\dfrac{-0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}98 \iff p\left(Z \leqslant \dfrac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}99$

La calculatrice donne alors $\dfrac{0{,}15}{\sigma_1} \approx 2{,}326$.

Finalement pour répondre à l'amélioration souhaitée, il faut régler la machine avec $\sigma_1 \approx 0{,}064$.

2. **a.**

Solution :

On répète $n = 250$ fois, de manière indépendante, un expérience n'ayant que deux issues dont la probabilité de « succès » (le tube n'est pas conforme) est $p = 0{,}02$. Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de succès, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0{,}02$.

$n = 250 \geqslant 30$, $np = 5 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 245 \geqslant 5$, on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$I = \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}003\,;\,0{,}037]$ à 10^{-3} près.

b.

Solution :

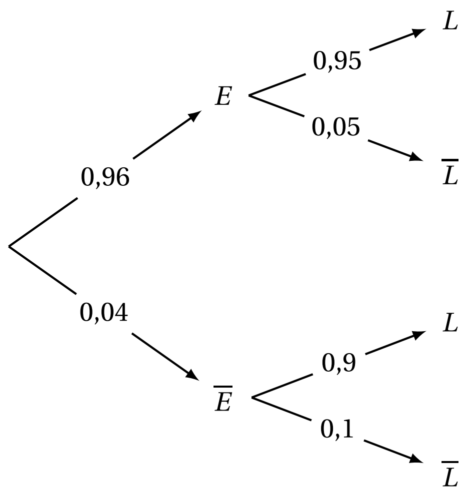
La fréquence observée de tubes non non « conformes pour la longueur » est $f = \dfrac{10}{250} = 0{,}04$.

On a $f \notin I$, on peut donc estimer qu'il faut réviser la machine.

Partie B

1.

Solution : D'après l'énoncé $p\left(\overline{E}\cap L\right) = 0{,}036$ donc $p_{\overline{E}}(L) = \dfrac{0{,}036}{0{,}04} = 0{,}9$.



2.

Solution : E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(L) &= p(L\cap E) + p\left(L\cap \overline{E}\right)\\ &= p_E(L)\times p(E) + 0{,}036\\ &= 0{,}95\times 0{,}96 + 0{,}036\\ &= 0{,}912 + 0{,}036 \end{aligned}$$

On a donc bien $p(L) = 0{,}948$.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Solution :

Affirmation 1 : FAUSSE

$$\begin{aligned} z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1) &\iff z - \mathrm{i}z = 2\mathrm{i}\\ &\iff z = \frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\\ &\iff z = \frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}^2}\\ &\iff z = -1+\mathrm{i}\\ &\iff z = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &\iff z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \neq \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Affirmation 2 : FAUSSE

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} &= 1+\left(\cos(2x)+\mathrm{i}\sin(2x)\right)\\ &= 1+\left(2\cos^2(x)-1+2\mathrm{i}\sin(x)\cos(x)\right)\\ &= 2\cos(x)\left(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)\right)\\ &= 2\cos(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 2\cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\end{aligned}$$

Affirmation 3 : VRAIE

Soit $A(\mathrm{i})$ et $B(-1)$ alors $|z-\mathrm{i}| = |z+1| \iff AM = BM$

M est donc sur la médiatrice de $[AB]$ or cette médiatrice est d'équation $y=-x$

Affirmation 4 : FAUSSE

$z^5+z-\mathrm{i}+1=0 \iff z^5+z+1=\mathrm{i}$

Si $z\in\mathbb{R}$, $\left(z^5+z+1\right)\in\mathbb{R}$

Alors $z^5+z+1\neq\mathrm{i}$

Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : établir une inégalité

1.

Solution :

f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

$$f=u-\ln(v) \implies f'=u'-\frac{v'}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x)=x\\ v(x)=1+x\end{cases} \implies \begin{cases} u'(x)=1\\ v'(x)=1\end{cases}$$

$\forall x\in[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{x+1}$

Sur $[0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{x}{x+1}\geqslant 0$. On en déduit que f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

2.

Solution :

$\forall x\in[0\,;\,+\infty[$, $f(x)\geqslant f(0)$ car f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

$f(0)=0$ d'où $\forall x\in[0\,;\,+\infty[$, $x-\ln(1+x)\geqslant 0$

On a donc bien $\forall x\in[0\,;\,+\infty[$, $\ln(1+x)\leqslant x$

Partie B : application à l'étude d'une suite

1.

Solution :
$u_1 = u_0 - \ln(1 + u_0) = 1 - \ln(2)$
$u_2 = u_1 - \ln(1 + u_1) = 1 - \ln(2) - \ln(2 - \ln(2)) \approx 0{,}0392$

2. a.

Solution :
Initialisation : $u_0 = 1 \geqslant 0$

Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $u_n \geqslant 0$
alors $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 0$ d'après la **partie A**
On en déduit que la propriété est héréditaire à partir du rang 0 or elle est vérifiée à ce même rang.
Par le principe de récurrence on peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$

b.

Solution :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n) \leqslant 0$ car $(1 + u_n) \geqslant 1$.
On en déduit que (u_n) est décroissante.
(u_n) est donc majorée par $u_0 = 1$.
Finalement on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.

c.

Solution :
(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge vers $\ell \geqslant 0$.

3.

Solution : $\ell = f(\ell) \iff \ln(1 + \ell) = 0 \iff \ell = 0$

4. a.

Solution :

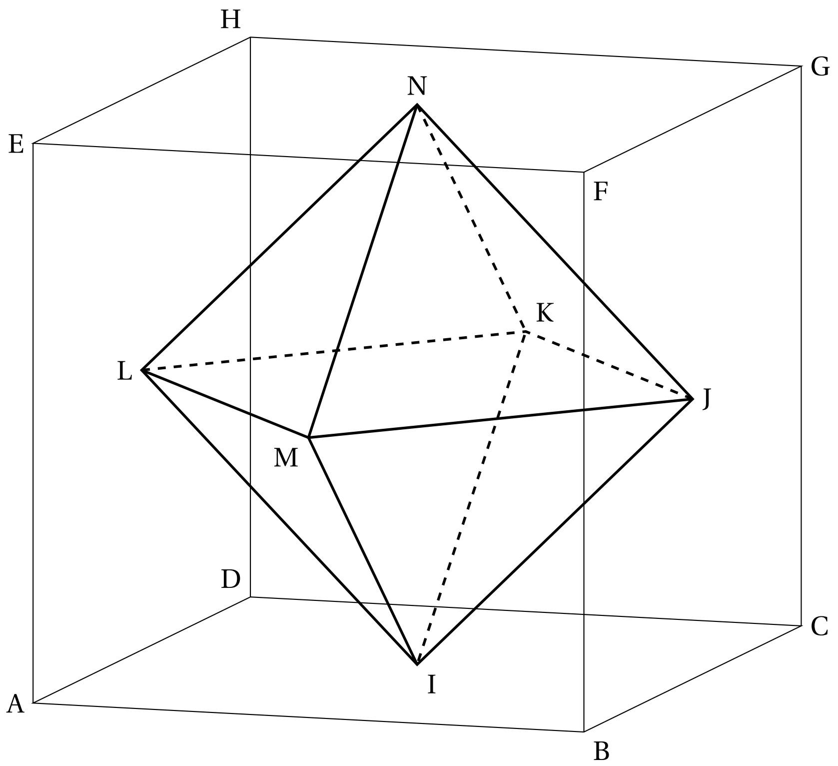
```
N ← 0
U ← 1
Tant que U ⩾ 10^(−p)
    U ← U − ln(1 + U)
    N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

b.

> **Solution :**
> En programmant l'algorithme, on trouve $n = 6$ comme le plus petit entier à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



1.

> **Solution :** L et M sont les milieux respectifs de [AH] et [AF] donc d'après le théorème de la droite des milieux dans AFH, on en déduit que (LM) est parallèle à (FH).
> (IN) et (BF) sont parallèles car BFNI est un rectangle or (BF) est perpendiculaire au plan (EFG) donc à la droite (FH).
> On a alors (IN) perpendiculaire à (FH) et comme (LM) est parallèle à (FH), on en déduit finalement que (IN) et (ML) sont orthogonales.

2. **a.**

> **Solution :** Dans $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ on a
> $\mathrm{C}(1\,;1\,;0)$, $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{L}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$

Donc $\overrightarrow{\text{NC}}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{ML}}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$.

b.

Solution :
Le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ est orthonormé donc on peut calculer un produit scalaire.
$\overrightarrow{\text{NC}}\cdot\overrightarrow{\text{ML}} = -0,25+0,25+0=0$
On en déduit que les vecteurs sont orthogonaux donc (NC) et (ML) sont orthogonales.

c.

Solution :
(ML) est orthogonale à (NC) et à (IN) qui sont deux droites sécantes du plan (NCI) donc (ML) est perpendiculaire au plan (NCI).
$\overrightarrow{\text{ML}}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$ est donc normal à (NCI) d'où $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal à (NCI).
On a alors (NCI) : $x-y+d=0$ or $\text{C}\in$ (NCI) d'où $x_C-y_C+d=0 \iff d=0$.
Finalement (NCI) : $x-y=0$.

3. a.

Solution :
Dans $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{AD}}\,;\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$ on a $\text{N}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$, $\text{J}\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $\text{M}\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$
$x_N-y_N+z_N=1$
$x_J-y_J+z_J=1$
$x_N-y_N+z_N=1$
(NJM) a donc bien pour équation cartésienne $x-y+z=1$.

b.

Solution : $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (NJM) d'après l'équation cartésienne trouvée précédemment. Or $\overrightarrow{\text{DF}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.
Finalement, la droite (DF) est perpendiculaire au plan (NJM).

c.

Solution :

N appartenant à ces deux plans, la droite cherchée passe par N.

Soit $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cette droite. $\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs normaux des deux plans, on a donc :

$$\begin{cases}\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u} = 0\\ \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n} = 0\end{cases} \iff \begin{cases}a-b=0\\ a-b+c=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=b\\ c=0\end{cases}$$

En posant $a = b = 1$, on en déduit que la droite d'intersection entre les plans (NCI) et (NJM) passe par N et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Il s'agit de la droite (EG) car $\overrightarrow{\text{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et N est le milieu de [EG].

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a.

Solution :

la lettre « T » est remplacée par $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $[5]$.

On en déduit donc que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U ».

la lettre « E » est remplacée par $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $[5]$.

On en déduit donc que la lettre « E » du message initial est codée par la lettre « O ».

Finalement, le message « TE » est codé par « UO ».

b.

Solution :

$PM = \begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 10\\10 & 16\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ $[5]$. On a donc bien $PM \equiv I$ $[5]$.

c.

Solution :

Posons $A = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix}a' & c'\\b' & d'\end{pmatrix}$

$AZ = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{pmatrix}$ et, de même $A'Z' = \begin{pmatrix}a'x'+c'y'\\b'x'+d'y'\end{pmatrix}$

On sait que $\begin{cases} a \equiv a' \ [5]\\ b \equiv b' \ [5]\\ c \equiv c' \ [5]\\ d \equiv d' \ [5]\end{cases}$ et $\begin{cases} x \equiv x' \ [5]\\ y \equiv y' \ [5]\end{cases}$

Les congruences étant compatibles avec la multiplication et l'addition, on en déduit que : $\begin{cases} ax+cy \equiv a'x'+c'y' \ [5]\\ bx+dy \equiv b'x'+d'y' \ [5]\end{cases}$

Finalement, on a bien $AZ \equiv A'Z'$ $[5]$.

d.

Solution :

$MX \equiv Y \ [5] \implies PMX \equiv PY \ [5]$

Or on a vu dans la question **1.c.** que PM ≡ I [5] avec I la matrice identité d'ordre 2. On en déduit que PMX ≡ IX [5] ≡ X [5].
Finalement on a bien MX ≡ Y [5] $\implies$ X ≡ PY [5].

e.

Solution :
la lettre « D » est remplacée par $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

$P\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ [5].
On en déduit donc que la lettre « D » du message codé est décodée par la lettre « O ».

2. a.

Solution :
$RS = \begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&2\\4&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20&20\\20&20\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ [5].

b.

Solution :
S ≡ S [5], on en déduit alors que TR ≡ I [5] entraîne TRS ≡ IS [5] ≡ S [5] d'après le résultat admis avant la question **2. d.**

c.

Solution :
Supposons qu'il existe une matrice T telle que les matrices TR et I soient congrues modulo 5.

$$\begin{cases}\mathrm{RS} \equiv \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ [5]}\\ \mathrm{T} \equiv \mathrm{T} \text{ [5]}\end{cases} \implies \mathrm{TRS} \equiv T\times\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ [5]} \equiv \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ [5]}.$$

Or on a prouvé dans la question précédente que TRS ≡ S [5].
Finalement s'il existe une matrice T telle que les matrices TR et I soient congrues modulo 5 alors S ≡ $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ [5] ce qui est évidemment absurde.
On en déduit qu'il n'existe pas de matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers telle que TR et I soient congrues modulo 5. Cela signifie que le codage à l'aide de la matrice R ne pourra pas être décodé.