MATHÉMATIQUES

Corrigé de l'épreuve du vendredi 21 juin 2019

France métropolitaine

Série S

Enseignement obligatoire

Exercice 1

Partie A

1.a. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

Par produit et somme des limites, $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$.

1. b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

$$e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow \ln(e^x) > \ln(e^{-x}) \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow x > 0$$

Par produit, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) < 0$ **donc $\boldsymbol{f}$ est strictement décroissante sur $\boldsymbol{[0;+\infty[}$.**

1. c. f est dérivable donc continue sur $[0; +\infty[$.

f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ d'après **1.b.**

$f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = \frac{5}{2} > 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

On constate que $0 \in]-\infty\,; \frac{5}{2}[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI), **l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet une unique solution sur $\boldsymbol{[0;+\infty[}$, que l'on note $\boldsymbol{\alpha}$.**

2. Pour tout réel x, $f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{-(-x)}\right) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = f(x)$.

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$ donc l'équation $f(-x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$ ce qui équivaut à dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; 0]$.

Enfin $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$.

Par conséquent, l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ admet exactement deux solutions sur R que sont $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{-\alpha}$.

Partie B

1. On a $f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \times 2 = 2{,}5.$

La hauteur d'un arceau est ainsi de 2,5 mètres.

2. a. Soit x un nombre réel. D'après la question **A. 1. b**, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Par suite, on a $1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2$

$$= 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^x \times e^{-x} + e^{-2x})$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$

$$= \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} = \frac{1}{4} \times (e^x + e^{-x})^2.$$

b. n a $I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{1}{4} \times (e^x + e^{-x})^2}\, dx$

$$= \int_0^\alpha \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\, dx$$

$$= \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}]_0^\alpha$$

$$= \frac{1}{2}[(e^\alpha - e^{-\alpha}) - (e^0 - e^0)]$$

$$= \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}).$$

Par définition, la longueur de la courbe sur l'intervalle $[0;\alpha]$ est donnée en mètre par l'intégrale I. Or un arceau de serre est représenté par la courbe sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$ qui est symétrique par rapport l'axe des ordonnées. Ainsi, sa longueur en mètre est égale à $2I = e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Partie C

1. L'aire du rectangle ABCD est $2 \times 1 = 2$m ². L'aire sous la courbe de f sur $[-\alpha;\alpha]$ est donnée par $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$. La quantité de bâche nécessaire pour la façade nord est

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx\ m^2 \text{ (1u.a.=1 m²)}.$$

La quantité de bâche nécessaire pour la façade sud est :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx - 2\ m^2.$$

La quantité de bâche nécessaire pour les deux façades est :

$$2\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx - 2\ m^2.$$

Puisque pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, par symétrie, l'expression précédente est égale à

$$\boldsymbol{4\int_0^{\alpha} f(x)dx - 2\ m^2.}$$

2. Aire de la bâche sur le dessus de la serre : $3 \times 1{,}5 \times (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 4{,}5 \times (e^{\alpha} - e^{-\alpha})$.

Aire totale de la bâche plastique :

$4\int_0^{\alpha} f(x)dx - 2 + 4{,}5 \times (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 4[3{,}5x - 0{,}5(e^{x} - e^{-x})]_0^{\alpha} - 2 + 4{,}5 \times (e^{\alpha} - e^{-\alpha})$.

Cela donne environ 42 m².