MATHÉMATIQUES

Corrigé de l'épreuve du vendredi 21 juin 2019

France métropolitaine

Série S

Enseignement obligatoire

Exercice 2

Partie A

1. a. Une partie de type A étant modélisée par une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [9; 25], la durée moyenne d'une partie de type A est donnée par : $\frac{9+25}{2} = \mathbf{17\ minutes.}$

1. b. Une partie de type B étant modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = 17$, la durée moyenne d'une partie de type B est égale à 17 minutes.

2. On a $P(X_A < 20) = \frac{20-9}{25-9} = \frac{11}{16}$

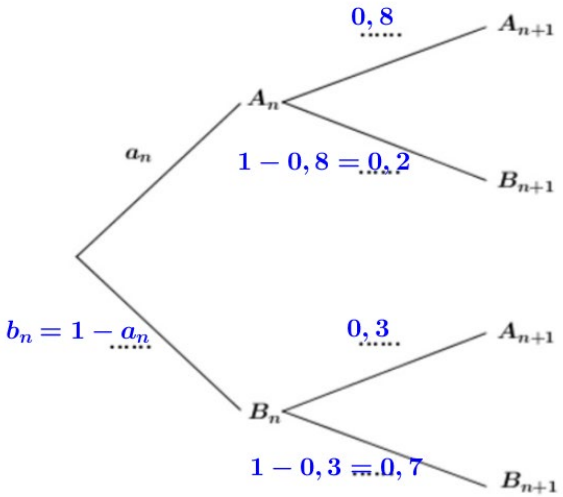
et $P(X_B < 20) = P(X_B < 17) + P(17 < X_B < 20) \approx 0{,}5 + \frac{0{,}68}{2} = 0{,}84.$

Le type de jeu étant choisi de manière équiprobable, la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes :

$$\frac{1}{2} \times P(X_A < 20) + \frac{1}{2} \times P(X_B < 20)$$
$$\approx \frac{1}{2} \times \frac{11}{16} + \frac{1}{2} \times 0{,}84$$
$$\approx \mathbf{0,76}.$$

Partie B

1. a.



1.b. Soit n un entier naturel non nul. On a : (formule des probabilités totales) :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1})$$
$$= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$$

$$= a_n \times 0{,}8 + b_n \times 0{,}3$$
$$= a_n \times 0{,}8 + (1 - a_n) \times 0{,}3$$
$$= \mathbf{0{,}5}\boldsymbol{a_n} + \mathbf{0{,}3}.$$

2. $P(n)$: $0 \leq a_n \leq 0{,}6$

Initialisation.

On a $a_1 = a = 0{,}5$. Or, $0 \leq 0{,}5 \leq 0{,}6$.

$P(1)$ est ainsi vraie.

Hérédité. Supposons la propriété vraie pour un entier naturel k non nul.

Montrons que $P(k+1)$ est vraie également.

D'après la question **B1b,** on a : $a_{k+1} = 0{,}5a_k + 0{,}3$.

Par hypothèse de récurrence, on a $0 \leq a_k \leq 0{,}6$.

Il en découle que $0 \times 0{,}5 + 0{,}3 \leq 0{,}5a_k + 0{,}3 \leq 0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}3$ ce qui s'écrit :

$$0{,}3 \leq a_{k+1} \leq 0{,}6.$$

Comme 0,3 est positif, on en déduit que $0 \leq a_{k+1} \leq 0{,}6$.

Conclusions. La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq a_n \leq 0{,}6$.

2. b. Pour tout entier naturel n non nul : $a_{n+1} - a_n = -0{,}5a_n + 0{,}3$. Or, d'après la question B1a, on a : $0 \leq a_n \leq 0{,}6 \Leftrightarrow 0 \geq -0{,}5a_n \geq -0{,}3 \Leftrightarrow 0{,}3 \geq -0{,}5a_n + 0{,}3 \geq 0$.

Ainsi, $a_{n+1} - a_n \geq 0$ ou encore $a_{n+1} \geq a_n$.

La suite $(\boldsymbol{a_n})$ est ainsi croissante.

2. c. La suite (a_n) étant croissante (question B2b) et majorée par 0,6 (question B2a), elle converge.

Par passage à la limite dans l'égalité $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$, la limite est $\mathbf{0{,}6}$.

3. a. Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}6 = 0{,}5a_n + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}5a_n - 0{,}3 = 0{,}5(a_n - 0{,}6) = 0{,}5u_n$.

La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est donc géométrique.

3. b. La suite (u_n) étant géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0{,}6 = a - 0{,}6$, on a (formule explicite) pour tout entier naturel non nul :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1}$$

Or, $u_n = a_n - 0{,}6$ et en conclusion :

$$a_n = u_n + 0{,}6 = (a - 0{,}6) \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}6.$$

3. c. Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$ et par suite,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = (a - 0{,}6) \times 0 + 0{,}6 = 0{,}6.$$

Cette limite ne dépend donc pas de la valeur de $\boldsymbol{a}$.

3. d. D'après la question B3c , $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$ et par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0{,}4$.

La publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo est donc **la publicité insérée en début des parties de type A.**