Asie 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} (1 - e^{-\frac{a}{80}t})$$

où

C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
 t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
 d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
 a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.
Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C .

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

- 1) Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0 ; +\infty[$.
- 2) Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

- 1) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

- 2) On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
f	0	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f .
On ne demande pas les limites de la fonction f .

- 3) Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} (1 - e^{-\frac{a}{80}t}).$$

- 1) On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
 - a) Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
 - b) Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromoles par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
- 2) Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Liban 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1[$ par :

$$f(x) = 30 \ln \left(\frac{20x}{1-x} \right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

- 1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1[$.
- 2) Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

- 1) a) Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.
b) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
- 2) Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.
- 3) La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
 - a) Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
 - b) Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?